

**Proximale Erweiterungen
nichtlinearer Funktionenfamilien**

Leopold Eichner

1976

Proximinale Erweiterungen
nichtlinearer Funktionenfamilien

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Leopold E i c h n e r
aus Kronach

eingereicht am:

26. Mai 1976



1. Berichterstatter: Professor Dr. G. Hämmerlin
2. Berichterstatter: Wiss. Rat Dr. A. Sachs
Tag der mündlichen Prüfung: 23. Juli 1976

Inhaltsverzeichnis

§ 1	Einleitung	1
§ 2	e-Folgenkompaktheit	9
	2.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele	9
	2.2 Eine hinreichende Bedingung	12
§ 3	Approximation in e-folgenkompakten Mengen	22
	3.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele	22
	3.2 Existenz bester Approximationen im nichtrationalen Fall	24
	3.3 Existenz bester Approximationen im rationalen Fall	30
§ 4	e-Folgenkompaktheit bei Lösungsmengen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen	39
	4.1 Definitionen, Bezeichnungen	39
	4.2 e-Folgenkompaktheit bei Lösungsmengen von Differentialgleichungen	43
	4.3 Ergänzende Sätze aus der Literatur	53
	4.4 "Optimale" Differentialoperatoren	58
§ 5	Über die Lösung der Grenzdifferentialgleichungen in Spezialfällen	63
	5.1 Einige Formeln und Hilfsmittel	63
	5.2 Eine Differentialgleichung für allgemeine Exponentialsummen	68
	5.3 Zur Lösung der Grenzdifferentialgleichung bei allgemeinen Exponentialsummen	75

§ 6	Anwendung der Ergebnisse auf praktische Beispiele	86
6.1	Ein theoretisches Beispiel	86
6.2	Approximation mit Polynom-Exponentialsummen und rationalen Polynom-Exponentialsummen	96

	Literaturverzeichnis	102
--	----------------------	-----

§ 1 Einleitung

Die immer komplizierteren Aufgaben, die aus technischen, physikalischen oder sonstigen naturwissenschaftlichen Bereichen an die Numerische Mathematik und Approximationstheorie herangetragen werden, erfordern mehr und mehr die Entwicklung und Bereitstellung von nichtlinearen Methoden. Durch den Einsatz von modernen elektronischen Rechanlagen wird es möglich die gewonnenen Verfahren numerisch zu realisieren und so Lösungen für die gestellte Aufgabe zu erhalten. Der numerischen Behandlung müssen aber in der Regel tiefergehende theoretische Untersuchungen vorausgehen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem der zahlreichen theoretischen Aspekte, nämlich mit der Existenz bester Approximationen bei gewissen nichtlinearen Approximationsaufgaben.

Von einem Approximationsproblem spricht man, wenn die Aufgabenstellung in die folgende Form gebracht werden kann:

1.1 Approximationsaufgabe:

Gegeben sei ein normierter Vektorraum V und eine (nichtleere) Teilmenge $A \subset V$. Zu gegebenem $v \in V$ finde man ein $f_0 \in A$ mit

$$\|f_0 - v\| = \inf_{f \in A} \|f - v\|.$$

f_0 heißt dann "beste Approximation" an v .

Die Möglichkeit ein gutes Verfahren zur Berechnung von besten Approximationen aufzustellen, hat in den meisten Fällen die zufriedenstellende Klärung der Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Charakterisierung bester Approximationen zur Voraussetzung. Für den Fall, daß A ein linearer Teilraum, oder allgemeiner eine konvexe Teilmenge von V ist, sind die Unter-

suchungen weitgehend abgeschlossen (vgl. z.B. I.SINGER[1970], K.-H.HOFFMANN[1972]). Bei vielen wichtigen Aufgabenstellungen sind allerdings die Approximationsmengen A nicht konvex (z.B. rationale Funktionen, Spline-Funktionen mit freien Knoten). Hier drei Beispiele, auf die die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit angewendet werden:

1.2 Beispiele:

- a) Approximation mit (gewöhnlichen) Exponentialsummen:

$$A_1 = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \exp(\lambda_j x) \mid a_j \in \mathbb{R}, \lambda_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n \right\} =: E_n^0$$

Diese Funktionen treten auf, z.B. bei Untersuchungen des radioaktiven Zerfalls (SPIESS[1970]).

- b) Approximation mit Polynom-Exponentialsummen:

$$A_2 = \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \exp(q_j(x)) \mid a_j \in \mathbb{R}, q_j \in P_m, 1 \leq j \leq n \right\} \\ =: E_{n,m}^0 \quad (\text{dabei ist } P_m \text{ der Raum der Polynome vom Höchstgrad } m).$$

Diese Funktionen dienen als Modellfunktionen in Medizin und Physik (M.BESTEHORN[1975]).

- c) Approximation mit rationalen Polynom-Exponentialsummen:

$$A_3 = \left\{ \frac{Z}{N} \mid Z \in E_{n_1, m_1}, N \in E_{n_2, m_2} \setminus \{0\} \right\} \cap C(I) \\ =: X_{n_1, m_1, n_2, m_2}^0.$$

Funktionen dieser Gestalt spielen bei der Magnetfeldberechnung bei Neutronentransportproblemen eine Rolle.

Gibt es im Approximationsproblem 1.1 zu jedem $v \in V$ eine beste Approximation $f_0 \in A$, so nennt man A proximal und das Approximationsproblem global lösbar. Notwendig dafür, aber nicht hinreichend ist die Abgeschlossenheit von A (vgl. K.-H. HOFFMANN[1972]), und mit einfachen Beispielen zeigt man, daß die unter 1.2 angegebenen Approximationsmengen diese Eigenschaft nicht besitzen. Zwangsläufig stellt sich also die Aufgabe eine (möglichst kleine) proximale Erweiterung $\tilde{A}$ von A explizit anzugeben, oder wenigstens durch einfache Bedingungen zu beschreiben. Die Lösung dieser Aufgabe ist deshalb so wichtig, weil die Charakterisierung der besten Approximation natürlich stark von der Gestalt von $\tilde{A}$ abhängt. Diese Charakterisierung ist aber in den meisten Fällen Ausgangspunkt für die Konstruktion von Verfahren zur Berechnung der besten Approximationen. Leider gibt es in der Literatur nur sehr wenige allgemeine Ansätze, die Untersuchungen in diese Richtung erleichtern.

Fast alle wichtigen reellen Approximationsaufgaben (Ausnahme z.B. Reihenentwicklungen) schreiben Approximationsmengen A der Form (1.3) oder (1.4) vor:

$$(1.3) \quad A = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j g_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R}, g_j \in G, 1 \leq j \leq n \right\}, \text{ wobei } G \subset (I)$$

und $n \in \mathbb{N}$ fest vorgegeben sind.

$$(1.4) \quad A = \left\{ \frac{Z}{N} \mid Z \in A', N \in A'' \setminus \{0\} \right\}, \text{ wobei } A' \text{ und } A''$$

fest vorgegebene Mengen von der Form (1.3) sind.

Einfache Beispiele sind die Approximation aus endlichdimensionalen Teilräumen des $C(I)$ (Form (1.3) mit endlicher Menge G) und die Approximation mit verallgemeinert rationalen Funktionen (Form (1.4)). Die Approximationsmengen aus Beispiel 1.2 sind ebenfalls von der Form (1.3) bzw. (1.4), können aber nicht mehr

mit den Hilfsmitteln behandelt werden, die für die eben zitierten Aufgaben entwickelt wurden. Die Menge A_1 aus Beispiel 1.2 ist dabei in die in neuerer Zeit immer wieder untersuchte Klasse der γ -Polynome einzuordnen:

1.5 Definition:

Sei $T \subset \mathbb{R}$ und $\gamma: T \rightarrow C(I)$ eine Abbildung. Dann heißt jede Funktion der Form

$$y = \sum_{j=1}^n \alpha_j \gamma(t_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad t_j \in T, \quad 1 \leq j \leq n$$

ein γ -Polynom der Ordnung n .

Die Menge $\Gamma_n^0(\gamma)$ aller γ -Polynome der Ordnung n ist unter die Form (1.3) einzuordnen. Wichtigste Beispiele sind

$\gamma(t, x) = e^{tx}$ (Exponentialsummen), $\gamma(t, x) = x^t$, $y(t, x) = (1+tx)^{-1}$ und $\gamma(t, x) = (x-t)_+^k$ (Splines) (vgl. C.R.HOBBY, J.R.RICE[1967]).

Für diese Klasse ist die vorhin aufgeworfene Frage nach einer proximalen Erweiterung gelöst (vgl. C.R.HOBBY, J.R.RICE[1967], C.De BOOR[1969]). Für den Existenzsatz benötigt man neben der Kompaktheit von $T \subset \mathbb{R}$ nur relativ schwache Bedingungen an γ : Differenzierbarkeit bezüglich t (genügend oft) und Voraussetzungen über lineare Unabhängigkeiten als Funktion von x . Allerdings können in so wichtigen Fällen wie Approximation mit Exponentialsummen ($T = \mathbb{R}$, also nicht kompakt) oder durch Splines mit freien Knoten (Differenzierbarkeit i.a. nicht erfüllt) die gewonnenen Ergebnisse nicht unmittelbar angewendet werden. Die Beispiele aus 1.2 b) und 1.2 c) lassen sich nicht in diese allgemeine Klasse einordnen und machen neue Untersuchungen erforderlich.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit der Frage nach der Existenz bester Approximationen, wenn die Approximationsmenge A von der Form (1.3) oder (1.4) ist. Allerdings

werden im Verlauf der Arbeit weitere Voraussetzungen an G notwendig werden.

Die eigentlichen Schwierigkeiten bei der Behandlung von Approximationsaufgaben vom Typ (1.3) liegen darin, daß die zu beschränkten Teilmengen von A gehörigen Koeffizientenmengen i.a. nicht beschränkte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind:

1.6 Beispiel:

Sei $G := \{ e^{tx} \mid t \in \mathbb{R} \}$ und $n := 2$.

Die Folge $\{y_k\}$, $y_k(x) = k \exp(k^{-1}x) - k \in C(I)$ konvergiert $(\|\cdot\|_\infty)$ auf jedem kompakten Intervall gegen x (Taylorentwicklung), ist also beschränkt. Die zugehörige Koeffizientenmenge $\{(k, -k) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ ist aber nicht beschränkt (trivial).

Sehr elegant wird diese Schwierigkeit speziell bei gewöhnlichen Exponentialsummen (Menge A_1) durch den Ansatz von H.WERNER[1969] gemeistert: Jede Exponentialsumme

$$a_1 \exp(\lambda_1 x) + \dots + a_n \exp(\lambda_n x)$$

wird als Lösung "der" ihr zugeordneten Differentialgleichung

$$Ly = (D - \lambda_1) \dots (D - \lambda_n)y = 0$$

aufgefaßt und an Stelle von Folgen aus A_1 werden Folgen von Differentialgleichungen betrachtet. Damit hat man sich von den Koeffizienten a_j befreit, muß aber dafür topologische Untersuchungen in der Menge A_1 anstellen. Einen entsprechenden Ansatz gibt es von D.W.KAMMLER[1973], der die Ergebnisse von H.WERNER auf C ausdehnt.

Dieser Ansatz soll in der vorliegenden Arbeit konsequent auf Approximationsmengen vom Typ (1.3) übertragen werden. Dazu sind natürlich Voraussetzungen an G notwendig, die im Verlauf der Arbeit Schritt für Schritt gestellt werden.

Welche Teilprobleme sind dabei zu lösen? Die Grundidee besteht darin, an Stelle beschränkter Folgen $\{f_k\} \subset A$ eine "zugehörige" Folge von Differentialoperatoren $\{L_k\}$ zu betrachten. Konvergiert diese Folge gegen L_0 , so hofft man,

daß eine geeignete Teilfolge $\{\varepsilon_k\} \subset \{f_k\}$ gegen ein Element aus $\text{Ker}(L_0)$ konvergiert, wobei diese Konvergenzbegriffe noch zu präzisieren sind.

Im § 2 wird die Konvergenzeigenschaft der Funktionenfolge untersucht. Es wird gezeigt, daß unter recht allgemeinen (und in der Praxis meist erfüllten) Voraussetzungen eine ziemlich starke Prae-Kompaktheitseigenschaft gültig ist:

Beschränkte Folgen enthalten Teilfolgen, die auf kompakten Mengen $K \subset E$, E endliche Punktmenge, gleichmäßig mit ihren Ableitungen bis zu einer vorgeschriebenen Ordnung konvergieren
(Prae-e-Folgenkompaktheit, vgl. Satz 2.2.8)

Damit werden die entsprechenden Ergebnisse von H. WERNER [1969], [1970] und E. SCHMIDT [1970, 1], [1970, 2] verallgemeinert und auf die L_p -Normen übertragen.

Im § 3 wird die Existenz bester Approximationen in "beschränkt e-folgenkompakten" Mengen (Definition 2.1.7 v) bewiesen. Die hier gewonnenen Ergebnisse (Existenz für $1 \leq p < \infty$, approximative Kompaktheit für $1 \leq p < \infty$) entsprechen den Ergebnissen von C. De BOOR [1969], die dort speziell für die Spline-Approximation formuliert werden. Außerdem wird die Existenz bei rationalen Aufgaben (Typ (1.4)) allgemein behandelt.

Im § 4 wird dann untersucht, wann die in § 2 als praekompakt (Kompaktheitsbegriff wie in § 2) erkannten Mengen schon kompakt sind, so daß die Approximationsaussagen von § 3 gültig werden. Unter gewissen Voraussetzungen an die Differentialoperatoren kann das sichergestellt werden. Außerdem wird für Fälle, in denen die Grenzdifferentialgleichungen nicht explizit lösbar sind, die generelle Möglichkeit von Charakterisierungen von "optimalen" Differentialgleichungen aufgezeigt.

Im § 5 wird dann die Lösung der Grenzdifferentialgleichungen für Spezialfälle untersucht. Hier werden die Ergebnisse von D.W.KAMMLER[1974] über die Approximation mit Exponentialsummen in mehreren Veränderlichen für solche Zwecke nutzbar gemacht. Die Einführung von "charakteristischen Funktionen" liefert dabei eine natürliche Verallgemeinerung der klassischen Untersuchungen für Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Die gewonnenen Ergebnisse tragen starke Analogien zu Aussagen aus der algebraischen Geometrie, lassen sich aber nicht in jedem Fall in diese überführen.

Im § 6 werden die Approximationsaufgaben aus Beispiel 1.2 mit den bereitgestellten Methoden behandelt. Für die Approximation mit Polynom-Exponentialsummen (A_2) wird der Existenzbeweis von M.BESTENOR[1975] in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ vervollständigt. Der angegebene Existenzsatz, der für die Tschebyscheff- und L_p -Approximation gültig ist, umfaßt darüberhinaus die entsprechenden Sätze von H.WERNER[1969] und D.W.KAMMLER [1973] bei der Approximation mit gewöhnlichen Exponentialsummen. Die rationale Aufgabe A_3 wird ebenfalls für $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ und $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$ behandelt. Weil man eine globale Existenzaussage nicht erreichen kann (vgl. Beispiel 3.3.3 und Bemerkung 6.2.7), wird ein Existenzsatz für eingeschränkte Mengen $A \subset \bar{A}_3$ bewiesen.

Während sich die Methoden aus den eben zitierten Arbeiten stark an der speziellen Gestalt der Approximationsfamilien orientieren, bieten die in dieser Arbeit zusammengestellten Aussagen eine breitere Anwendungsmöglichkeit. Zur Erläuterung der für konkrete Fälle notwendigen Untersuchungen wird im § 6.1 ein theoretisches Beispiel durchgerechnet. Das Beispiel ist dabei so gewählt, daß nicht von vorne herein alle Voraussetzungen erfüllt sind.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode erfährt natürlich Einschränkungen in ihrer Anwendungsmöglichkeit vor allem

dann, wenn die auftretenden Grenzdifferentialgleichungen explizit gelöst werden müssen. Bedenkt man aber, daß einerseits die in der Praxis auftretenden Probleme nur selten mehr als drei oder vier Summanden vorschreiben, also auf Differentialgleichungen von höchstens vierter Ordnung führen, und daß andererseits in immer stärkerem Maße Probleme betrachtet werden, bei denen von vorne herein nur die Differentialgleichungen gegeben sind ("Parameteridentifikationsprobleme"), so scheinen doch die gewonnenen Sätze für viele praktische Probleme gut geeignet zu sein.

Herrn Prof. Dr. G. Hämmerlin und Herrn Prof. Dr. K.-H. Hoffmann
danke ich für die Betreuung und Unterstützung.

§ 2 e-Folgenkompaktheit

2.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele

2.2 Eine hinreichende Bedingung

2.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele

Hier werden einige Bezeichnungen und Vereinbarungen zusammengestellt, die die Formulierung der Aussagen der folgenden Abschnitte etwas erleichtern.

2.1.1 Bezeichnungen:

- i) $\mathbb{R} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (ohne weitere top. Struktur)
- ii) Für $A \subset \mathbb{R}$ sei
 $\text{Abb}(A, \mathbb{R}) := \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung} \}$
 die Menge der "numerischen Funktionen" auf A
 (H. RICHTER [1966]).
- iii) Für $f \in \text{Abb}(A, \mathbb{R})$, $B \subset A$ sei

$$\|f\|_{\infty, B} := \sup_{x \in B} |f(x)| \in \mathbb{R}.$$

2.1.2 Definitionen:

Sei $B \subset \mathbb{R}$, $f \in \text{Abb}(A, \mathbb{R})$.

- i) f heißt kompakt beschränkt in B :
 $\wedge_{K \subset B} \|f\|_{\infty, K} < \infty$.
 K komp.
- ii) f heißt e-beschränkt in B :
 $\vee_{\substack{B' \subset B \\ E \text{ endlich}}} f \text{ kompakt beschränkt in } B'.$

2.1.3 Beispiel:

Sei $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ $\exists x \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} x^{-1} & \text{für } x \neq 0 \\ \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

f ist kompakt beschränkt in $(0,1]$, e -beschränkt in $[0,1]$, aber nicht beschränkt ($\|\cdot\|_\infty$) in $[0,1]$ oder $(0,1]$.

2.1.4 Definitionen (e-konvergent):

Sei $\{f_k\} \subset \text{Abb}(A, \overline{\mathbb{R}})$ eine Folge und $f \in \text{Abb}(A, \overline{\mathbb{R}})$.

- i) $\{f_k\}$ heißt e-konvergent auf A $:=$
 $\bigvee_{\substack{E \subset A \\ E \text{ endl. } K \text{ komp.}}} \bigwedge_{K \subset A \setminus E} \{f_k|_K\} \text{ konvergent } (\|\cdot\|_{\infty, K})$
auf K .
- ii) $f = e\text{-}\lim f_k := \{f_k\}$ e-konvergent gegen f
(auf A).
- iii) $f = e\text{-}\lim f_k$ mit Ausnahmemenge $E \subset A$ $:=$
 E endlich und $\{f_k|_K\}$ konvergent ($\|\cdot\|_{\infty, K}$)
gegen f für jedes Kompaktum $K \subset A \setminus E$.
 f heißt dann e-Limes (e-Grenzfunktion) von $\{f_k\}$.

2.1.5 Bemerkungen:

- i) Auf $\text{Abb}(A, \overline{\mathbb{R}})$ definiert

$$f \sim g := \bigvee_{\substack{E \subset A \\ E \text{ endl.}}} \bigwedge_{x \in A \setminus E} f(x) = g(x)$$

eine Äquivalenzrelation.

- ii) Sei $\{f_k\} \subset \text{Abb}(A, \overline{\mathbb{R}})$ Folge, $f, g \in \text{Abb}(A, \overline{\mathbb{R}})$.
Es gilt:
 $e\text{-}\lim f_k = f$ und $e\text{-}\lim f_k = g \Rightarrow f \sim g$.

Beweis: i) trivial.

- ii): $f = e\text{-}\lim f_k$ mit Ausnahmemenge E_1 ,
 $g = e\text{-}\lim f_k$ mit Ausnahmemenge E_2 ,
 $E := E_1 \cup E_2$.

Falls $E = A$ ist nichts zu beweisen; sei also $E \neq A$ und $x \in A \setminus E$.
 $K := \{x\}$ ist kompakt und es gilt $g(x) = \lim f_k(x) = f(x)$.

2.1.6 Vereinbarung:

Im Sinne der Äquivalenzrelation aus 2.1.5 i) wird kurz von "der" Grenzfunktion einer e -konvergenten Folge gesprochen.

2.1.7 Definitionen:

- i) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ heißt e -beschränkt auf A :=
 $\bigwedge_{f \in X} f$ e -beschränkt auf A ,
- ii) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ heißt gleichmäßig e -beschränkt auf A :=
 $\bigvee_{E \subseteq A} \bigvee_{E \text{ endl.}} \bigvee_{C \in \mathbb{R}^+} \bigwedge_{f \in X} \bigwedge_{K \subseteq A \setminus E} \|f\|_{\infty, K} \leq C$,
 K komp.
- iii) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ heißt prae- e -folgenkompakt :=
 Jede Folge aus X besitzt eine e -konvergente Teilfolge,
- iv) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ heißt e -folgenkompakt :=
 Jede Folge aus X besitzt eine e -konvergente Teilfolge mit e -Grenzfunktion in X ,
- v) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$ heißt beschränkt e -folgenkompakt :=
 Jede beschränkte Folge aus X besitzt eine e -konvergente Teilfolge mit e -Grenzfunktion in X ,
- vi) $X \subseteq \text{Abb}(A, \mathbb{R})$, $f_0 \in X$:
 f_0 heißt e -Häufungspunkt von X :=
 $\bigvee_{\{f_k\} \subset X \setminus \{f_0\}} f_0 = e\text{-}\lim f_k$

2.1.8 Beispiel:

$A := [0, 1]$, $f_k := x^k$ für $k \in \mathbb{N}$, $f := 0$.

- i) $f = e\text{-}\lim f_k$ mit Ausnahmemenge $E = \{1\}$,
- ii) $X := \{f\} \cup \{f_k | k \in \mathbb{N}\}$ ist e -folgenkompakt, aber nicht kompakt.

2.2 Eine hinreichende Bedingung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß man aus Differenzierbarkeitseigenschaften und Nullstelleneigenschaften von Funktionen aus $\text{Abb}(I, \bar{R})$ die prae-e-Folgenkompaktheit von X folgern kann (I ist dabei ein kompaktes Intervall mit nichtleerem Inneren).

Die Überlegungen schließen an die Untersuchungen von H. WERNER [1969], [1970] und E. SCHMIDT [1970, 1], [1970, 2] an und liefern eine Verallgemeinerung der dort gewonnenen Ergebnisse auch im Fall der Approximation in der L_p -Norm ($1 \leq p < \infty$).

2.2.1 Bezeichnungen:

Sei $A \subset \mathbb{R}$, $f \in \text{Abb}(A, \bar{R})$, $B \subset A$.

$$Z(f, B) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } f=0 \\ \{x \in B \mid f(x)=0\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$N(f, B) := |Z(f, B)|$ "Anzahl der Nullstellen von f in B "

2.2.2 Lemma (H. WERNER):

Sei $f \in C^{n+1}(I)$, $Z_f := \text{Rd}(I) \cup \bigcup_{i=0}^{n+1} Z(f^{(i)}, I)$.

Dann gilt:

$$\bigwedge_{d>0} \bigwedge_{0 \leq j \leq n} \bigwedge_{x \in I} \left(\inf_{z \in Z_f} |x-z| \geq jd \Rightarrow |f^{(j)}(x)| \leq \|f\|_{\infty, I} d^{-j} \right).$$

Beweis: H. WERNER [1969], Seite 135 .

2.2.3 Korollar:

Sei $\{f_k\} \subset C^{n+1}(I)$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_{\infty})$ Folge mit $N(f_k^{(n+1)}, I) \leq N_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$\bigvee_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \{g_k^{(i)}\}$ gleichm. e-beschränkt auf I .
Teilf.

Beweis: Nach dem Satz von Rolle gilt mit $N(f_k^{(n+1)}, I) \leq N_0$ stets auch $N(f_k^{(n+1-j)}, I) \leq N_0 + j$. Daher gibt es Zahlen $l_0, l_1, \dots, l_{n+1} \in \{0, 1, \dots, n+1+N_0\}$ und eine Teilfolge $\{h_k\} \subset \{f_k\}$ mit $N(h_k^{(j)}, I) = l_j$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq j \leq n+1$. Seien im Fall $l_j \neq 0$ $x_1(h_k^{(j)}), \dots, x_{l_j}(h_k^{(j)})$ die Nullstellen von $h_k^{(j)}$ in I ($0 \leq j \leq n+1$). Es gibt nun eine Teilfolge $\{u_k\} \subset \{h_k\}$ mit

$$(*) \quad \bigwedge_{\substack{0 \leq j \leq n+1 \\ l_j \neq 0}} \bigwedge_{1 \leq i \leq l_j} \text{ex. } \lim x_i(u_k^{(j)}) =: x_{ij}$$

Ferner darf o.E.d.A. angenommen werden, daß stets $u_k^{(j)} \neq 0$ (da sonst die Behauptung für eine Teilfolge trivialerweise erfüllt wäre).

Sei $E := \{x_{ij} \mid 0 \leq j \leq n+1, l_j \neq 0, 1 \leq i \leq l_j\} \cup \text{Rd}(I)$ und $g_k = u_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Sei $K \subset I \setminus E$ ein Kompaktum, $d_K := \inf\{|x-a| \mid x \in E, a \in K\}$.

Zu $\varepsilon := 2^{-1}d_K$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ (nach(*)) mit:

$$\bigwedge_{k \geq k_0} \{x_0 \in I \mid \bigvee_{j \in \{0, \dots, n+1\}} u_k^{(j)}(x_0) = 0\} \subset U(E, 2^{-1}d_K) := \bigcup_{x \in E} [x - 2^{-1}d_K, x + 2^{-1}d_K].$$

Für jedes $x \in K$ gilt:

$$\inf_{z \in E} |x-z| \geq \inf_{z \in U(E, d_K/2)} |x-z| \geq d_K/2 = \varepsilon, \text{ wenn } \varepsilon := (2i)^{-1}d_K.$$

Nach Lemma 2.2.2 gilt nun:

$$\bigwedge_{k \geq k_0} \bigwedge_{x \in K} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} |u_k^{(i)}(x)| \leq \varepsilon^{-i} \|u_k\| = (2i)^1 d_K^{-i} \|u_k\| \leq S$$

wobei S wegen der Beschränktheit von $\{f_k\}$ unabhängig von $k \in \mathbb{N}$ ist. Folglich gilt:

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \|u_k^{(i)}\|_{\infty, K} \leq \max \left\{ S, \max_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 1 \leq r \leq k_0}} \|u_r^{(j)}\|_{\infty, K} \right\} .$$

q.e.d.

◇

2.2.4 Lemma (E. SCHMIDT):

Sei $X \subset C^{n+1}(I)$, $X \neq \emptyset$, X beschränkt ($\|\cdot\|_{\infty}$)
mit $N(h^{(n+1)}, I) \leq n+1$.

Dann gilt:

$\bigvee_{\{u_k\} \subset X}$ $\bigwedge_{K \subset I \setminus \text{Rd}(I)}$ $\{u_k\}$ konvergent ($\|\cdot\|_{\infty}$) auf K
Folge K komp.

(also insbesondere X praee-folgenkompakt).

Beweis: E. SCHMIDT [1970, 2], Seite 449.

◇

2.2.5 Lemma:

Sei $\{h_k\} \subset C(I)$ eine Folge, für die gilt:

$$\bigvee_{N_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} N(h_k, I) \leq N_0 .$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \bigvee_{\{u_k\} \subset \{h_k\}} \bigvee_{E \subset I} \bigwedge_{K \subset I \setminus E} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq k_0} N(u_k, K) = 0 . \\ \text{Teilfolge} \quad E \text{ endl.} \end{array}$$

Beweis: Es gibt $l \in \{0, \dots, N_0\}$ und eine Teilfolge $\{g_k\} \subset \{h_k\}$ mit $N(g_k, I) = l$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für $l=0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $l \neq 0$.

Seien $x_1(g_k), \dots, x_l(g_k)$ die Nullstellen von g_k auf I ($k \in \mathbb{N}$). Die Folgen $\{x_j(g_k)\}$ ($1 \leq j \leq l$) sind beschränkte Teilmengen von I und besitzen Häufungspunkte $x_j \in I$ ($1 \leq j \leq l$). Es gibt also eine Teilfolge $\{u_k\} \subset \{g_k\}$, für die gilt:

$$(*) \quad \bigwedge_{1 \leq j \leq l} x_j = \lim x_j(u_k) .$$

Sei $E := \{x_1, \dots, x_l\}$, $K \subset I \setminus E$ kompakt und $d := \inf\{|a-x| \mid a \in K, x \in E\}$.
 Wegen $I \setminus E$ offen, E endlich und $K \subset I \setminus E$ kompakt gilt $d > 0$.
 Nach (*) gibt es zu $\varepsilon = 2^{-1}d$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$\bigwedge_{1 \leq j \leq l} \bigwedge_{k \geq k_0} |x_j(u_k) - x_j| < 2^{-1}d.$$

Insbesondere gilt also $x_j(u_k) \notin K$ ($k \geq k_0, 1 \leq j \leq l$), was anders geschrieben bedeutet

$$\bigwedge_{k \geq k_0} N(u_k, K) = 0 \quad (\text{da } x_1(u_k), \dots, x_l(u_k) \text{ alle Nullstellen in } I)$$

q.e.d.



Das nächste Lemma wird es ermöglichen, die bis jetzt nur für die Maximumsnorm zusammengestellten Aussagen auch für die L_p -Normen verfügbar zu machen.

2.2.6 Lemma:

Sei $1 \leq p < \infty$, $\{f_k\} \subset C(I)$, eine beschränkte $(\|\cdot\|_p)$ Folge, für die gilt

$$\bigvee_{N_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \in \mathbb{N}} (f_k \neq \text{const.} \Rightarrow |f_k| \text{ besitzt höchstens } N_0 \text{ relative Extrema in } I)$$

Dann gilt:

$$\bigvee_{E \subset I} \bigwedge_{\substack{\{g_k\} \subset \{f_k\} \\ E \text{ endl. Teilfolge}}} \bigwedge_{\substack{K \subset I \setminus E \\ K \text{ komp.}}} \{g_k\} \text{ beschränkt } (\|\cdot\|_\infty) \text{ auf } K$$

(d.h. $\{g_k\}$ gleichm. ε -beschränkt auf I).

Beweis: Die Menge $\{f_k \in \{f_k \mid k \in \mathbb{N}\} \mid f_k = \text{const.}\}$ ist trivialerweise beschränkt $(\|\cdot\|_\infty)$ auf I . Daher darf angenommen werden, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f_k \neq \text{const.}$

Sei $\{s_k\} \subset \{f_k\}$ Teilfolge, für die gilt: $\text{extr}(|s_k|) = L$ für alle k (Existenz von $L \in \{0, \dots, N_0\}$ und $\{s_k\}$ trivial). Dabei ist $\text{extr}(|f|) :=$ Anzahl der relativen Extrema von $|f|$ in I .

Seien $x_1(s_k), \dots, x_L(s_k)$ die Extremstellen von s_k in I in der Reihenfolge $x_1(s_k) < \dots < x_L(s_k)$;

Wie im vorangegangenen Beweis schließt man auf die Existenz von Punkten $x_1, \dots, x_L \in I$ und einer Teilfolge $\{s_k\} \subset \{f_k\}$ mit

$$\lim x_j(s_k) = x_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq L$$

Sei nun $E := \text{Rd}(I) \cup \{x_1, \dots, x_L\} =: \{x_0, \dots, x_L\}$ (o.E.d.A.) in der Reihenfolge $x_0 < \dots < x_L$, wobei $1 \leq L+1$ und $\{x_0, x_L\} = \text{Rd}(I)$.

Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Kompaktum. Weil $I \setminus E$ offen, existiert ein $\epsilon > 0$ so daß

$$[x_0, x_0 + 2\epsilon) \cap K = (x_L - 2\epsilon, x_L] \cap K = \emptyset \quad \text{und} \quad (x_j - 2\epsilon, x_j + 2\epsilon) \cap K = \emptyset$$

für $1 \leq j \leq L-1$.

o.E.d.A. sei $\epsilon \leq 8^{-1} \min\{|x_j - x_i| \mid 1, j \in \{0, \dots, L\}, i \neq j\}$.

Dann gilt:

$$\bigcap_{j=0}^{L-1} [x_j + 2\epsilon, x_{j+1} - 2\epsilon] \neq \emptyset \quad \text{und} \quad K \subset \bigcup_{j=0}^{L-1} [x_j + 2\epsilon, x_{j+1} - 2\epsilon].$$

Zu diesem $\epsilon > 0$ existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$k \geq k_0 \quad 0 \leq j \leq L-1 \quad |g_k| \quad \text{monoton in } [x_j + \epsilon, x_{j+1} - \epsilon],$$

weil $|g_k|$ nach Konstruktion im Inneren eines solchen Intervalls keine relativen Extrema haben kann.

Es ist nun noch zu zeigen, daß $\{g_k\}$ gleichmäßig beschränkt ($\|\cdot\|_\infty$) in $[x_j + 2\epsilon, x_{j+1} - 2\epsilon]$ für alle $j \in \{0, \dots, L-1\}$. Sei

dazu $j \in \{0, \dots, L-1\}$ gegeben; die Funktionen $g_1, \dots, g_{k_0}$

sind stetig und daher auf I gleichmäßig beschränkt. Es genügt also die Behauptung für $k \geq k_0$ zu beweisen.

Für $k \geq k_0$ ist $|g_k|$ monoton in $[x_j + \epsilon, x_{j+1} - \epsilon]$.

Sei $I_{j+1, \epsilon} := [x_{j+1} - 2\epsilon, x_{j+1} - \epsilon]$ und

$$\|g_k\|_{I_{j+1, \epsilon}}^p := \int_{I_{j+1, \epsilon}} |g_k(x)|^p dx.$$

1. Fall: $|g_k|$ monoton wachsend in $[x_j + \epsilon, x_{j+1} - \epsilon]$.

Für $x \in I_{j+1, \epsilon}$ gilt: $|g_k(x_{j+1}-2\epsilon)| \leq |g_k(x)|$, also

$$\epsilon |g_k(x_{j+1}-2\epsilon)|^p \leq \|g_k\|_{I_{j+1, \epsilon}}^p \leq \|g_k\|_I^p \leq M^p$$

(dabei ist M die Beschränkungskonstante von $\{f_k\}$).
Wegen der Monotonie von $|g_k|$ gilt daher

$$x \in [x_{j+2\epsilon}, x_{j+1}-2\epsilon] \quad |g_k(x)| \leq |g_k(x_{j+1}-2\epsilon)| \leq M\epsilon^{-1/p} =: M^*.$$

Dabei ist M^* unabhängig von k und j .

2. Fall: $|g_k|$ monoton fallend in $[x_j+\epsilon, x_{j+1}-\epsilon]$.

Analoge Betrachtung für die Stelle $x_{j+2\epsilon}$ und Integration über $[x_j+\epsilon, x_{j+2\epsilon}]$ liefert:

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x \in [x_{j+2\epsilon}, x_{j+1}-2\epsilon] \quad |g_k(x)| \leq M^{**},$$

wobei M^{**} unabhängig von k und j .

Wegen $K \subset \bigcup_{j=0}^{l-1} [x_{j+2\epsilon}, x_{j+1}-2\epsilon]$ gilt:

$$\forall x \in K \quad \bigwedge_{k \geq k_0} |g_k(x)| \leq \max\{M^*, M^{**}\}.$$

q.e.d.



Mit den bereitgestellten Aussagen läßt sich nun leicht der folgende Satz beweisen. Er gibt eine hinreichende Bedingung für die ϵ -prae-Folgenkompaktheit.

2.2.7 Satz:

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\{f_k\} \subset C^{n+2}(I)$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_p)$ Folge, die der Nullstellenbedingung

$$\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} N(f_k^{(n+2)}, I) \leq N_0 \quad (N_0 \text{ unabhängig von } k)$$

genügt.

Dann gilt:

$\bigvee_{E \in \mathcal{I}} \bigvee_{y_0 \in C^n(I \setminus E)} \{s_k\} \subset \{f_k\} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} (y_0^{(i)} = e\text{-}\lim s_k^{(i)})$ mit
 E endl. Ausnahmemenge E

(d.h. i): $\{f_k\}$ ist prae-c-folgenkompakt und
 ii): e-Grenzfunktion Element $C^n(I \setminus E)$).

Beweis: Sei $1 \leq p < \infty$.

Es gibt eine Teilfolge $\{s_k\} \subset \{f_k\}$, die gleichmäßig e-beschränkt ist, denn im Fall $1 \leq p < \infty$ sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2.6 erfüllt (Anzahl der Nullstellen von f_k und f'_k sind unabhängig von k beschränkt), während im Fall $p = \infty$ bereits die Folge $\{f_k\}$ selbst die behauptete Eigenschaft besitzt.

In jedem der durch die eventuell vorhandenen Ausnahmepunkte der Folge $\{s_k\}$ erzeugten endlich vielen Teilintervalle sind die Voraussetzungen von Korollar 2.2.3 erfüllt. Daher gilt:

$\bigvee_{\{h_k\} \subset \{f_k\}} \bigwedge_{0 \leq i \leq n+1} \{h_k^{(i)}\}$ gleichmäßig e-beschränkt auf I .

Für die Folgen $\{h_k\}, \{h'_k\}, \dots, \{h_k^{(n)}\}$ sind die Voraussetzungen von Lemma 2.2.5 erfüllt. Weil es sich um endlich viele Folgen handelt, gilt:

$\bigvee_{\{u_k\} \subset \{h_k\}} \bigvee_{E \in \mathcal{I}} \bigwedge_{K \subset I \setminus E} \bigvee_{x_0 \in K} \bigwedge_{k \geq k_0} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} N(u_k^{(i)}, K) = 0$
 Teilfolge E endl. K komp.

Sei $\{K_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ eine Folge kompakter Mengen $K_s \subset I \setminus E$ mit $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_s \subset K_{s+1} \subset \dots$ und $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s = I \setminus E$, wobei jedes K_s

disjunkte Vereinigung von endlich vielen Intervallen sei.

In jedem der endlich vielen Teilintervalle von K_s ist Lemma 2.2.4 anwendbar auf $\{u_k\}, \{u'_k\}, \dots, \{u_k^{(n)}\}$, d.h.:

(*) $\bigwedge_{s \in \mathbb{N}} \bigvee_{\{u_{\tau_s(k)}\} \subset \{u_k\}} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \bigwedge_{\substack{K \subset K_s \\ K \text{ komp.}}} \{u_{\tau_s(k)}^{(i)}\}$ gleichmäßig konvergent auf K

o.E.d.A. können die Teilfolgen $\{u_{\tau_s(k)}\}$ so gewählt werden,

daß gilt:

$$\{u_{\tau_1}(k)\} \supset \dots \supset \{u_{\tau_s}(k)\} \supset \{u_{\tau_{s+1}}(k)\} \supset \dots ;$$

Sei $g_k := u_{\tau_k}(k)$ für $k \in \mathbb{N}$ ("Diagonalfolge") .

Es soll nun gezeigt werden, daß $\{g_k\}$ die Behauptung des Satzes erfüllt (e-Konvergenz):

Sei E wie oben, $\{g_k\}$ wie eben definiert, $i \in \{0, \dots, n\}$ und $K \subset I \setminus E$ Kompaktum.

Wegen der Kompaktheit von K und der Eigenschaft $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s^0 = I \setminus E$ gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K_s^0$. Dann $s \in \mathbb{N}$ hat

$\{u_{\tau_s}(k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft (*), und weil $\{g_k\}$ als Teilfolge von $\{u_{\tau_s}(k)\}$ aufgefaßt werden kann, gilt (*) auch für $\{g_k\}$. Damit ist $\{f_k\}$ prae-e-folgenkompakt und mit Standardsätzen aus der Analysis erhält man die Konvergenz von $\{g_k\}$ mit seinen Ableitungen gegen $y_0 \in C^n(I \setminus E)$.

q.e.d.



Die Voraussetzungen von Satz 2.2.7 lassen sich leicht noch etwas abschwächen: man muß die Voraussetzungen nur in endlich vielen Stücken zur Verfügung haben.

2.2.8 Satz:

Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\{f_k\} \subset \text{Abb}(I, \mathbb{R})$ eine Folge mit den Eigenschaften:

$$(VI) \quad \bigvee_{N_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{f \in \{f_k | k \in \mathbb{N}\}} \bigvee_{\substack{1_f \in \mathbb{N} \\ 1_f \leq 1_0}} \bigvee_{x_0^f < \dots < x_{1_f}^f \in I} \bigwedge_{0 \leq j < 1_f} \text{Rd}(I) = \{x_0^f, x_{1_f}^f\} \\ (f | (x_j^f, x_{j+1}^f)) \in C^{n+2}((x_j^f, x_{j+1}^f)) \quad .$$

d.h.: jedes $f \in \{f_k | k \in \mathbb{N}\}$ ist stückweise $(n+2)$ -mal stetig differenzierbar und die Anzahl der Stücke ist unabhängig von f beschränkt.

$$(V2) \quad \bigvee_{N_1 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{f \in \{f_k | k \in \mathbb{N}\}} \sum_{j=0}^{n+2} N^*(f^{(j)}, I) \leq N_1,$$

$$\text{wobei } N^*(f^{(j)}, I) := \sum_{\alpha=1}^{l_{f-1}} N(f^{(j)}, (x_{\alpha}^f, x_{\alpha+1}^f)).$$

Dann gilt:

- i) Jede beschränkte $\{\|\cdot\|_p, 1 \leq p < \infty\}$ Teilfolge von $\{f_k\}$ ist prae-e-folgenkompakt,
- ii) die e-Grenzfunktionen sind stückweise n-mal stetig differenzierbar, wobei die Anzahl der Stücke gleichmäßig beschränkt ist, d.h.

$$\begin{aligned} & \{g_k\} \subset \{f_k\} \quad \{h_k\} \subset \{g_k\} \quad \bigvee_{B \in I} \bigvee_{E \text{ endl.}} y_0 \in C^n(I \setminus E) \\ & \text{beschr. Teilf. Teilfolge} \\ & \bigwedge_{0 \leq i \leq n} y_0^{(i)} = e\text{-}\lim h_k^{(i)} \text{ mit Ausnahmemenge } E. \end{aligned}$$

Beweis: Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Anzahl der Stücke, in denen $\{g_k\}$ die Bedingungen von Satz 2.2.7 erfüllt, gibt es eine endliche Menge E und eine Teilfolge $\{u_k\} \subset \{f_k\}$ mit:

$$\bigwedge_{K \in I \setminus E} \bigvee_{k_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{k \geq k_0} \{u_k\} \text{ erfüllt Vor.von 2.2.7 auf } K.$$

Mit den gleichen Methoden wie im vorangegangenen Beweis erhält man die Behauptung.

q.e.d.



Die vorangegangenen Untersuchungen haben gezeigt, daß recht allgemeine Funktionenklassen die Eigenschaft der prae-e-Folgenkompaktheit besitzen. Darunter befinden sich eigentlich alle wichtigen Approximationsfunktionen, die von technischen oder physikalischen Anwendungen her bekannt sind (mit Satz 2.2.8 sind auch die Spline-Funktionen eingeschlos-

sen). Es bleibt nun zu fragen, unter welchen Bedingungen sich solche Funktionenklassen zu e -folgenkompakten Mengen erweitern lassen. Daß nicht immer eine solche Erweiterung möglich ist, zeigt:

2.2.9 Beispiel:

Sei $I := [-1, +1]$, $f_k(x) := (1 + e^{kx})^{-1} \in C^\infty([-1, 1])$, $(k \in \mathbb{N})$.

Es gilt:

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Z(f_k, I) \cup Z(f'_k, I) \cup Z(f''_k, I)) = \{0\}.$$

Daher sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.7 mit $n=0$ erfüllt und die e -Grenzfunktion ist

$$y_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}.$$

Es gilt $y_0 \in C^\infty(I \setminus \{0\})$, aber y_0 ist im Nullpunkt nicht stetig ergänzbar. Damit läßt sich $\{f_k | k \in \mathbb{N}\} \subset C([-1, 1])$ im Raum der stetigen Funktionen nicht zu einer e -folgenkompakten Menge erweitern (obwohl $\{f_k | k \in \mathbb{N}\} \subset C^\infty([-1, 1])$!).



Bevor weiter untersucht wird, durch welche Voraussetzungen die Existenz einer e -folgenkompakten Erweiterung sichergestellt werden kann, soll im nächsten Paragraphen zuerst die Frage nach der Existenz von besten Approximationen in e -folgenkompakten Mengen behandelt werden.

§ 3 Approximation in ϵ -folgenkompakten Mengen

3.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele

3.2 Existenz bester Approximationen im nichtrationalen Fall

3.3 Existenz bester Approximationen im rationalen Fall

3.1 Definitionen, Bezeichnungen, Beispiele

In diesem Abschnitt ist $(V, \| \cdot \|)$ einer der Räume $(C(I), \| \cdot \|_\infty)$ oder $(L_p(I), \| \cdot \|)$, $1 \leq p < \infty$ (dabei ist I ein kompaktes Intervall mit nichtleerem Inneren). Die Definitionen aus §2 seien für $V = L_p(I)$ in dem Sinn übertragen, daß die geforderten Eigenschaften jeweils für ein (geeignetes) Repräsentantensystem erfüllt sind. In diesem Sinn bleiben die in §2.2 hergeleiteten Sätze auch für die L_p -Räume gültig.

3.1.1 Definition:

Sei $X \subset V$, $v \in V$.

i) $d(v, X) := \inf_{f \in X} \| f - v \|$ Abstand von v und X

$$P_X(v) := \{ f_0 \in X \mid \| f_0 - v \| = d(v, X) \}$$

P_X heißt Projektionsoperator von V auf X .

ii) X heißt Existenzmenge (oder proximal) $:=$
 $\bigwedge_{v \in V} P_X(v) \neq \emptyset$

iii) $\{f_k\} \subset X$ heißt Minimalfolge zu $v \in V$ $:=$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \| f_k - v \| = d(v, X)$.

3.1.2 Bemerkungen:

- i) $\{f_k\} \subset X$ Minimalfolge zu $v \in V$, so ist auch jede Teilfolge $\{g_k\} \subset \{f_k\}$ wieder Minimalfolge zu v .
- ii) X proximal $\Rightarrow X$ abgeschlossen,
denn $f \in \text{Rd}(X)$, so $d(f, X) = 0$, aber die Umkehrung ist i.a. nicht richtig (vgl. z.B. K.-H. HOFFMANN [1972]).

3.1.3 Definition (N.V. BRIMOV, S.B. STEČKIN [1961])

$X \subset V$ heißt approximativ kompakt $:=$

$$\bigwedge_{v \in V} \bigwedge_{\{f_k\} \subset X} \bigwedge_{\substack{\{g_k\} \subset \{f_k\} \\ \text{Minimalfolge} \\ \text{zu } v}} \bigwedge_{f_0 \in X} \lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - f_0\| = 0$$

3.1.4 Bemerkung:

Es gilt:

- X kompakt $\Rightarrow X$ beschränkt kompakt $\Rightarrow$
- $\Rightarrow X$ approximativ kompakt $\Rightarrow X$ proximal $\Rightarrow$
- $\Rightarrow X$ abgeschlossen,
- aber keine der Implikationen ist umkehrbar
(vgl. K.-H. HOFFMANN [1972])

Im nächsten Abschnitt wird untersucht, wie sich die ϵ -Folgenkompaktheit in diese Implikationenkette einordnen läßt. Daß ϵ -folgenkompakte Mengen i.a. nicht schon kompakt sind, zeigt Beispiel 2.1.8.

3.2 Existenz bester Approximationen im nichtrationalen Fall

Sei $(V, \| \cdot \|)$ einer der Räume $(C(I), \| \cdot \|_\infty)$ oder $(L_p(I), \| \cdot \|_p)$, $1 \leq p < \infty$ und $X \subset V$ eine Teilmenge. Betrachtet wird die folgende

3.2.1 Approximationsaufgabe (nichtrationaler Fall):

Zu $v \in V$ finde man $f_0 \in X$ mit
 $\| f_0 - v \| = d(v, X)$.

Die Approximationsaufgabe heißt global lösbar :
 $\bigwedge_{v \in V} P_X(v) \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma läßt leicht darauf schließen, daß
 e -folgenkompakte Mengen X in der Sprechweise von
 C.De BOOR[1969] "fast kompakt" sind, was wiederum die
 Proximinalitt von X zur Folge hat.

3.2.2 Lemma:

Sei $1 \leq p < \infty$; $\{f_k\} \subset X$ sei e -konvergent gegen $f_0 \in V$.
 Sei $g \in V$ und $\{\|g - f_k\|\}$ konvergent.

Dann gilt:

$$\|g - f_0\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|g - f_k\|.$$

Beweis:

1) Sei $p = \infty$, $V = C(I)$.

Sei E die zu $\{f_k\}$, f_0 gehörige Ausnahmemenge. Wegen der
 Stetigkeit von g und f_0 gilt:

$$\begin{aligned} \|f_0 - g\| &= \max_{x \in I} |f_0(x) - g(x)| = \sup_{x \in I \setminus E} |f_0(x) - g(x)| = \\ &= \sup_{x \in I \setminus E} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_k(x) - g(x)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|. \end{aligned}$$

2) Sei $1 \leq p < \infty$, $V = L_p(I)$.

Sei E die zu $\{f_k\}$, f_0 gehörige Ausnahmemenge. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine (offene) Umgebung U_ϵ von E mit Maß $\mu(U_\epsilon)$ "klein" mit $\|f_0 - g\|_{U_\epsilon} < \epsilon$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|f_0 - g\|_I &= \|f_0 - g\|_{U_\epsilon} + \|f_0 - g\|_{I \setminus U_\epsilon} \\ &= \|f_0 - g\|_{U_\epsilon} + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_{I \setminus U_\epsilon} \leq \\ &\leq \|f_0 - g\|_{U_\epsilon} + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_I < \\ &< \epsilon + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_I. \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\|f_0 - g\|_I < \epsilon + \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - g\|_I$ gilt für alle $\epsilon > 0$ und die Behauptung ist bewiesen.

q.e.d.

◇

Damit erhält man:

3.2.3 Satz:

Sei $1 \leq p < \infty$ und $X \subset V$, $X \neq \emptyset$ beschränkt e -folgenkompakt.

Dann ist X proximal.

Beweis:

Sei $v \in V$ gegeben und $\{f_k\} \subset X$ Minimalfolge zu v . $\{f_k\}$ ist beschränkt und besitzt nach Voraussetzung einen e -Häufungspunkt $f_0 \in X$. Es gilt:

$$\begin{aligned} d(v, X) &\leq \|f_0 - v\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - v\| = d(v, X) \\ f_0 \in X \quad (3.2.2) \quad \{f_k\} \text{ Minimalf.} \quad &\text{q.e.d.} \end{aligned}$$

◇

Für $1 \leq p < \infty$ läßt sich sogar die approximative Kompaktheit von X folgern. Vorbereitet wird diese Aussage durch:

3.2.4 Lemma:

Sei $1 \leq p < \infty$, $V = L_p(I)$ und $\{f_k\} \subset V$ eine beschränkte Folge mit e-Häufungspunkt $f_0 \in V$.

Ferner gelte für ein $v \in V$:

i) $\{\|v - f_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und

ii) $\|v - f_0\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|v - f_k\|$.

Dann gibt es eine Teilfolge $\{g_k\} \subset \{f_k\}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g_k - f_0\|_p = 0.$$

Beweis:

Annahme: die gewünschte Teilfolge existiert nicht.

Dann gilt:

$f_0 \notin \overline{\{f_k | k \in \mathbb{N}\}}$ (Vor. i).ii)) und

$$c := \inf_{k \in \mathbb{N}} \|f_k - f_0\| > 0.$$

Nach Voraussetzung ist f_0 e-Häufungspunkt von $\{f_k\}$; daher gibt es eine Teilfolge $\{g_k\} \subset \{f_k\}$ und eine endliche Menge $E \subset I$ mit:

$$f_0 = e\text{-}\lim g_k \text{ mit Ausnahmemenge } E.$$

Weil $f_0 - v \in L_p(I)$ gibt es eine (offene) Umgebung U von E mit Maß $|U|$ "klein" und

$$(1) \quad \|f_0 - v\|_U := \left(\int_U |f_0 - v|^p \right)^{1/p} < 10^{-1}c$$

(vgl. Hilfssatz 2.26, Seite 178 in H. RICHTER [1966])

U offen $\Rightarrow I \setminus U =: K$ kompakt und $K \cap E = \emptyset$.

Es gilt also $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_0 - g_k\|_{\infty, K} = 0$ und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_0 - g_k\|_{p, K} = 0$. Daher gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit:

$$(2) \quad \|f_0 - g_k\|_{p, K} < 10^{-1}c \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Nach der Dreiecksungleichung und (2) erhält man:

$$(3) \quad | \| f_0 - v \|_{p,K} - \| v - g_k \|_{p,K} | \leq \| f_0 - g_k \|_{p,K} < 10^{-1}c$$

für alle $k \geq k_0$.

Weiterhin ist folgende Abschätzung gültig:

$$\begin{aligned} (4) \quad & | \| f_0 - v \|_U - \| g_k - v \|_U | = \\ & = | \| f_0 - v \|_U + (\| f_0 - v \|_K - \| f_0 - v \|_K) - \\ & - \| g_k - v \|_U - (\| g_k - v \|_K - \| g_k - v \|_K) | \leq \\ & \leq | \| f_0 - v \|_I - \| g_k - v \|_I | + | \| g_k - v \|_K - \| f_0 - v \|_K | \\ & \quad \begin{matrix} I \\ U \cap K = I \\ U \cap K = \emptyset \end{matrix} \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} \| v - g_k \|_I = \| v - f_0 \|_I$ (Vor. i)) gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit:

$$(5) \quad | \| v - g_k \|_I - \| v - f_0 \|_I | < 10^{-1}c \quad \text{für alle } k \geq k_1.$$

Sei $k_2 := \max \{k_0, k_1\}$ und $k \geq k_2$. Dann gilt nach (4), (5), (3)

$$\begin{aligned} & | \| v - f_0 \|_U - \| g_k - v \|_U | \leq | \| f_0 - v \|_I - \| g_k - v \|_I | + \\ & + | \| g_k - v \|_K - \| f_0 - v \|_K | < 10^{-1}c + 10^{-1}c = 2c/10. \end{aligned}$$

Damit ist für $k \geq k_2$ folgende Abschätzung gültig:

$$\begin{aligned} \| f_0 - g_k \|_I &= \| f_0 - g_k \|_U + \| f_0 - g_k \|_K \leq \\ &\leq \| f_0 - v \|_U + \| v - g_k \|_U + \| f_0 - g_k \|_K \leq \\ &\leq \| f_0 - v \|_U + \| f_0 - g_k \|_K + \| v - g_k \|_U + 2c/10 = \\ &= 2\| f_0 - v \|_U + \| f_0 - g_k \|_K + 2c/10 < \\ &< (2c/10) + (c/10) + (2c/10) = c/2. \end{aligned}$$

Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von c

q.e.d.



Damit ergibt sich

3.2.5 Satz:

Sei $1 \leq p < \infty$, $V = L_p(I)$ und $X \subset V$, $X \neq \emptyset$.
dann gilt:

X beschränkt e-folgenkompakt $\Rightarrow$
 $\Rightarrow X$ approximativ kompakt.

Beweis:

Sei $v \in V$ gegeben und $\{f_k\} \subset X$ Minimalfolge zu v . Die Folge $\{f_k\}$ ist also beschränkt und besitzt einen e-Häufungspunkt $f_0 \in X$. Es darf o.E.d.A. angenommen werden, daß $\{\|f_k - v\|\}$ monoton fallend (sonst gehe man zu geeigneter Teilfolge über). Dann sind für $\{f_k\}$, f_0 und v alle Voraussetzungen von Lemma 3.2.4 erfüllt, und man erhält:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{\substack{v \\ \{g_k\} \subset \{f_k\}}} \|g_k - f_k\| = 0.$$

q.e.d.



3.2.6 Bemerkung:

Für $1 \leq p < \infty$ kann also die Implikationskette aus Bemerkung 3.1.4 in der folgenden Weise erweitert werden:

X kompakt $\Rightarrow X$ beschränkt kompakt $\Rightarrow$
 $\Rightarrow X$ beschränkt e-folgenkompakt $\Rightarrow$
 $\Rightarrow X$ approximativ kompakt $\Rightarrow X$ proximal $\Rightarrow$
 $\Rightarrow X$ abgeschlossen.

Das nächste Beispiel zeigt, daß im Fall $p = \infty$ eine entsprechende Aussage nicht richtig ist:

3.2.7 Beispiel:

$I := [0, 1]$, $\|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$; $f(x) = 0$ für alle $x \in I$,
 $f_k(x) := x^k$, $k \in \mathbb{N}$ und $X := \{f\} \cup \{f_k | k \in \mathbb{N}\}$.
 X ist e-folgenkompakt (vgl. Beispiel 2.1.8).

Sei nun $v(x) := 1/2$ für alle $x \in I$.

Es gilt:

$$(f_k(x) - 1/2)' = f_k'(x) = kx^{k-1}, \text{ also}$$

$$\|f_k - v\|_{\infty} \in \{|f_k(0) - 1/2|, |f_k(1) - 1/2|\} = \{1/2\},$$

$$\|f - v\|_{\infty} = 1/2.$$

Daher ist $\{f_k\}$ Minimalfolge zu v , enthält
aber keine $\|\cdot\|_{\infty}$ -konvergente Teilfolge.



3.2 Existenz bester Approximationen im rationalen Fall

In diesem Abschnitt wird die folgende Aufgabe behandelt:

3.3.1 Approximationsaufgabe (rationaler Fall):

Sei $(V, \|\cdot\|)$ einer der Räume $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$
oder $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ und

$X_Z \subset C(I)$, $X_N \subset C(I) \setminus \{0\}$, $X_Z, X_N \neq \emptyset$.

$X := \{ \frac{Z}{N} \mid Z \in X_Z, N \in X_N \} \cap V$

Gesucht: Zu gegebenem $v \in V$ "beste Approximation"
 $r_0 \in X$ (also $r_0 \in P_X(v)$).

Um unnötige Komplikationen zu vermeiden, wird für diesen Abschnitt vereinbart:

3.3.2 Vereinbarung:

- i) $\sup \{N(f, I) \mid f \in X_N\} < \infty$ (vgl. Bezeichnung 2.2)
Die Nennerfunktionen dürfen also stets nur endlich viele Nullstellen in I besitzen.
- ii) X_Z, X_N homogen, d.h. für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f \in X_Z$ bzw. X_N gilt wieder $\alpha f \in X_Z$ bzw. X_N .

Diese Vereinbarung macht die Kennernormierung möglich, ohne dadurch die Approximationsfamilie X zu ändern.

Die rationale Approximationsaufgabe 3.3.1 ist nach den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts dann global lösbar, wenn X beschränkt ϵ -folgenkompakt ist. Dies wird in den meisten Fällen höchstens dann zutreffen, wenn die Mengen X_Z

und X_N selbst schon beschränkt e-folgenkompakt sind. Daß das aber nicht hinreichend ist, zeigt das folgende

3.3.3 Beispiel:

(X_Z, X_N) beschränkt e-folgenkompakt $\nrightarrow$
 X beschränkt e-folgenkompakt)

$$I := [-1, 1] , \quad r_k(x) := (1 + e^{kx})^{-1} \quad (k \in \mathbb{N}) ;$$

$$r_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-1, 0) \\ 1/2 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in (0, 1] \end{cases}$$

Es gilt:

$\lim r_k(x) = r_0(x)$ (punktweise auf $[-1, 1]$) und wegen der e-Konvergenz und Beschränktheit von $\{r_k\}$ ist r_0 Häufungspunkt von $\{r_k\}$ im $L_p(I)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Sei $X_Z := \{1\}$,

$X_N := E_2$, die Menge der Exponentialsummen vom Grad kleiner oder gleich zwei.

Nach H. WERNER[1959] oder E. SCHMIDT[1970, 2] ist E_2 beschränkt e-folgenkompakt und erfüllt die Vereinbarung 3.3.2. Die Grenzfunktion r_0 liegt aber für kein $p, 1 \leq p < \infty$ in X .

◇

Schreibt man r_k in der Form

$$r_k(x) = \frac{(1 + e^k)^{-1}}{(1 + e^{kx})(1 + e^k)^{-1}} , \quad k \in \mathbb{N} ,$$

so gilt für die Nennerfunktionen $N_k(x) := (1 + e^{kx})(1 + e^k)^{-1}$, $\|N_k\|_\infty = 1$, wobei die Norm auf das Intervall $[-1, 1]$ bezogen ist. Aber es gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} N_k(x) = 0$ für alle $x \in (-1, 1)$. Die folgende Definition schließt solche Fälle aus.

3.3.4 Definition:

- i) Eine Folge $\{r_k\} \subset X$ heißt zulässige Folge, wenn es $Z_k \in X_Z$, $N_k \in X_N$ gibt, mit $r_k = Z_k / N_k$ ($k \in \mathbb{N}$) und
 - (1) $\|r_k\| \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $M \in \mathbb{R}^+$
 - (2) $\|N_k\|_\infty \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $C \in \mathbb{R}^+$
 - (3) Die Menge der e-Häufungspunkte von $\{N_k\}$ enthält eine von 0 verschiedene Funktion oder ist leer.
- ii) $\{r_k\} \subset X$ heißt zulässige Minimalfolge zu $v \in V$:
 $\{r_k\}$ ist sowohl zulässige Folge als auch Minimalfolge für v .
- iii) X heißt zulässig :
 Jede beschränkte Folge aus X enthält eine zulässige Teilfolge.

3.3.5 Bemerkung:

Die Bedingung (2) von 3.3.4i ist wegen der Vereinbarung 3.3.2ii immer erfüllbar.

Der folgende Satz stellt im Fall $V = L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$ die Verbindung zu den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts her. Der daran anschließende Zusatz sichert unter einer stärkeren Voraussetzung, die nicht direkt mit der e-Folgenkompaktheit der Zähler- und Nennerfunktionen zusammenhängt, die entsprechende Aussage auch im Fall $V = C(I)$.

3.3.6 Satz:

Sei $(V, \|\cdot\|)$ einer der Räume $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$.

Seien X_Z, X_N beschränkt e-folgenkompakt und zwar X_Z in der Norm von V , X_N in der Tschebyscheff-Norm.

Sei $X := \{ \frac{Z}{N} \mid Z \in X_Z, N \in X_N \setminus \{0\} \} \cap V$, $X \neq \emptyset$.

Dann besitzt jede zulässige Folge $\{r_k\} \subset X$ eine e -konvergente Teilfolge mit e -Grenzfunktion in X .

Beweis:

$\{r_k\}$ ist zulässige Folge; daher gibt es Folgen $\{z_k\} \subset X_Z$, $\{N_k\} \subset X_N \setminus \{9\}$, so daß die Bedingungen (1), (2), (3) aus Definition 3.3.4i erfüllt sind. Wegen der Endlichkeitsbedingung der Nullstellenanzahlen in $X_N \setminus \{9\}$ (vgl. 3.3.2i) gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele Punkte aus I

$$|r_k(x)| = \frac{|z_k(x)|}{|N_k(x)|} \geq C^{-1} |z_k(x)|$$

und daher (a) $M \geq \|r_k\| \geq C^{-1} \|z_k\|$ (C wie in 3.3.4i(2))

Wegen der beschränkten e -Folgenkompaktheit von X_N darf angenommen werden, daß $e\text{-}\lim N_k = N_0 \neq 9$ (vgl. 3.3.4i(3)). Die Folge $\{z_k\}$ ist nach (a) beschränkt und es darf wiederum o.E.d.A. angenommen werden, daß $e\text{-}\lim z_k = z_0 \in X_Z$.

Setze $r_0 := \frac{z_0}{N_0}$.

Zu zeigen ist $r_0 = e\text{-}\lim \frac{z_k}{N_k}$ und $r_0 \in V$.

1) Es wird gezeigt, daß $r_0 = e\text{-}\lim \frac{z_k}{N_k}$.

Seien E_Z und E_N die Ausnahmemengen von $\{z_k\}, z_0$ bzw. $\{N_k\}, N_0$ und $E_0 := \{x \in I \mid N_0(x) = 0\}$.

$E := E_0 \cup E_Z \cup E_N$ (ist endliche Menge)

Sei $K \subset I \setminus E$ ein Kompaktum und sei

(b) $c := \inf_{x \in K} |N_0(x)| > 0$ (da N_0 stetig und $\neq 0$ in K).

Es gilt $\lim \|N_k - N_0\|_{\infty, K} = 0$ (da $K \subset I \setminus E_{N_0}$);

daher existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $k \geq k_0$ und alle $x \in K$ $|N_k(x) - N_0(x)| \leq c/2$, also auch $|N_0(x)| - c/2 \leq |N_k(x)|$ und daher

$$|N_k(x)| \geq |N_0(x)| - c/2 \geq \inf_{x \in K} |N_0(x)| - c/2 = c/2.$$

Also gilt

$$(c) \quad \bigwedge_{x \in K} \bigwedge_{k \geq k_0} |N_k(x)| \geq \frac{c}{2}.$$

Für alle $x \in K$ und alle $k \geq k_0$ gilt:

$$\left| \frac{Z_k(x)}{N_k(x)} - \frac{Z_0(x)}{N_0(x)} \right| = |N_k(x)|^{-1} |N_0(x)|^{-1} |N_0(x)Z_k(x) - Z_0(x)N_k(x)|$$

und mit (b) und (c) erhält man die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \frac{Z_k(x)}{N_k(x)} - \frac{Z_0(x)}{N_0(x)} \right| &\leq \\ &\leq 2c^{-2} (|N_0(x)Z_k(x) - Z_0(x)N_0(x)| + |Z_0(x)N_0(x) - Z_0(x)N_k(x)|) \\ &\leq 2c^{-2} (|N_0(x)| |Z_k(x) - Z_0(x)| + |Z_0(x)| |N_0(x) - N_k(x)|) \leq \\ &\leq 2c^{-2} (\|N_0\|_{\infty, I} \|Z_k - Z_0\|_{\infty, K} + \|Z_0\|_{\infty, I} \|N_0 - N_k\|_{\infty, K}) \end{aligned}$$

Diese Abschätzung ist auch für $\|r_k - r_0\|_{\infty, K}$ gültig und wegen der e-Konvergenz von $\{Z_k\}$ gegen Z_0 und $\{N_k\}$ gegen N_0 folgt $\lim \|r_k - r_0\|_{\infty, K} = 0$.

Damit ist $r_0 = e\text{-}\lim r_k$.

2) Es wird gezeigt, daß $r_0 \in V = L_p(I)$, $1 \leq p < \infty$.

Wegen der Stetigkeit von Z_0 und N_0 ist r_0 stetig in jedem $K \subset I \setminus E$ (E wie in 1)), K kompakt. und daher $r_0 \in L_p(K)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von r_k gegen r_0 auf K gilt $\|r_0\|_{p, K} \leq M$ (dabei ist M die Beschränkungskonstante von $\|r_k\|_p$ aus 3.3.4i(1) und unabhängig von K).

Sei nun $\{K_j\}$ eine Folge kompakter Mengen aus $I \in E$ mit $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_j \subset K_{j+1} \subset \dots$ und $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j = I \in E$ (Existenz der Folge trivial).

Setze

$$r_{K_j}(x) := \begin{cases} |r_0(x)| & \text{für } x \in K_j \\ 0 & \text{für } x \in I \setminus (K_j \cup E) \\ j & \text{für } x \in E \end{cases}$$

Für die Folge $\{r_{K_j}\}$ gilt: $r_{K_j}(x) \leq r_{K_{j+1}}(x)$ für alle $x \in I, j \in \mathbb{N}$ und

$$\|r_{K_j}\|_{p, I} = \|r_{K_j}\|_{p, K_j} \leq M \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Aus der Definition von $\{r_{K_j}\}$ erhält man sofort

$$\lim_{j \rightarrow \infty} r_{K_j}(x) = |r_0(x)| \quad \text{fast überall in } I.$$

$\{r_{K_j}\}$ ist also eine Folge im $L_p(I)$, die alle Voraussetzungen des Satzes (2.28), Seite 169 aus H. RICHTER [1966] erfüllt.

Damit gilt $r_0 \in L_p(I)$ und Satz 3.3.6 ist vollständig bewiesen.

q.e.d.



Im Fall $V = C(I)$ kann der erste Teil dieses Beweises wörtlich übernommen werden. Die Eigenschaft $r_0 \in C(I)$ läßt sich aber nicht schon aus der Stetigkeit von Z_0 und N_0 und der Beschränktheit von $\|r_0\|_\infty := \sup_{I \in E} |Z_0(x)| |N_0(x)|^{-1}$ folgern. Dazu:

3.3.7 Beispiel:

$$\text{Sei } r_0(x) := \frac{|x|}{x}, \quad x \in [-1, 1] \setminus \{0\}.$$

Dann gilt :

$\|r_0\|_\infty \leq 1$, aber r_0 nicht stetig ergänzbar im Nullpunkt.



3.3.8 Zusatz:

Sei $V=C(I)$ und $X_Z, X_N \subset V$. Für $Z \in X_Z$, $N \in X_N$ und $E := \{x \in I \mid N(x)=0\}$ sei

i) $\frac{Z}{N} \in C(I) := \frac{Z}{N}$ stetig in $I \setminus E$ und stetig ergänzbar für alle $x \in E$,

ii) $\|\frac{Z}{N}\|_\infty := \sup_{x \in I \setminus E} |\frac{Z(x)}{N(x)}|$.

Ferner seien X_Z und X_N so, daß stets gilt:

iii) $\bigwedge_{Z \in X_Z} \bigwedge_{N \in X_N \setminus \{0\}} \|\frac{Z}{N}\|_\infty < \infty \Rightarrow \frac{Z}{N} \in C(I)$.

Sei $X := \{ \frac{Z}{N} \mid Z \in X_Z, N \in X_N \setminus \{0\} \} \cap C(I)$ und seien X_Z, X_N beschränkt e -folgenkompakt $(\|\cdot\|_\infty)$.

Dann besitzt jede zulässige Folge $\{r_k\} \subset X$ eine e -konvergente Teilfolge mit e -Grenzfunktion in X .

Beweis:

Der 1. Teil des Beweises von Satz 3.3.6 ist wörtlich übertragbar. Die Eigenschaft $r_0 \in C(I)$ folgt aus Voraussetzung iii).

q.e.d.



3.3.9 Bemerkung:

Die Voraussetzung iii) aus 3.3.8 ist z.B. immer dann erfüllt, wenn X_Z und X_N nur analytische Funktionen enthalten.

Damit erhält man:

3.3.10 Approximationsausage:

Sei X wie in 3.3.6 definiert und V einer der Räume $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ oder $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. X erfülle im Fall $1 \leq p < \infty$ die Voraussetzungen von 3.3.6 und im Fall $p = \infty$ zusätzlich Voraussetzung

iii) aus 3.3.8 .

Dann gilt:

- $\forall v \in V$ besitzt beste Approximation aus X $\Leftrightarrow$
 $\bullet$ es gibt eine zulässige Minimalfolge $\{r_k\} \subset X$
 für v .

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": Sei $r_0 \in P_X(v)$ und $r_k := r_0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{r_k\}$ trivialerweise zulässige Minimalfolge.

" $\Leftarrow$ ": Sei $\{r_k\}$ zulässige Minimalfolge zu $v \in V$. Dann gibt es nach Satz 3.3.6 bzw. 3.3.8 ein $r_0 \in X$ und eine Folge $\{s_k\} \subset \{r_k\}$ mit $r_0 = e\text{-}\lim s_k$. Nach Lemma 3.2.2 gilt dann $d(v, X) = \lim \|s_k - v\| = d(v, X)$, also $r_0 \in P_X(v)$.

q.e.d.



Im Fall $1 \leq p < \infty$ kann man mit Lemma 3.2.4 diese Aussage erweitern:

3.3.11 Satz:

X erfülle die Voraussetzungen von 3.3.10 . Sei $1 \leq p < \infty$ und $v \in V$ gegeben.

Dann hat jede zulässige Minimalfolge $\{r_k\} \subset X$ einen L_p -Häufungspunkt in X .

Beweis:

Es gibt $r_0 \in X$ und $\{s_k\} \subset \{r_k\}$ mit $r_0 = e\text{-}\lim s_k$.
 Außerdem gilt : $\|r_0 - v\| = \lim \|r_k - v\|$, wobei o.E.d.A. vorausgesetzt werden darf, daß $\{\|s_k - v\|\}$ monoton fallend ist. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.4 erfüllt und es folgt die Behauptung.

q.e.d.



3.3.12 Satz:

X sei zulässige Menge und erfülle die Voraussetzungen von 3.3.10 .

Dann gilt:

- i) $1 \leq p < \infty$: X proximal
- ii) $1 \leq p < \infty$: X approximativ kompakt..

Beweis:

- i) folgt wegen der Zulässigkeit von X direkt aus 3.3.10
- ii) folgt aus 3.3.11 .

q.e.d.



§ 4 e-Folgenkompaktheit bei Lösungsmengen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

- 4.1 Definitionen, Bezeichnungen
- 4.2 e-Folgenkompaktheit bei Lösungsmengen von linearen Differentialgleichungen
- 4.3 Ergänzende Sätze aus der Literatur
- 4.4 "Optimale" Differentialoperatoren

Im §2 wurde gezeigt, daß man noch unter recht allgemeinen Voraussetzungen auf die prae-e-Folgenkompaktheit von vorgegebenen Funktionenmengen schließen kann. Sucht man aber nach einem e-folgenkompakten Abschluß in einem vorgegebenen Raum, etwa $C(I)$, so sieht man am Beispiel 2.2.9, daß es nicht genügt nur höhere Differenzierbarkeitsforderungen zu stellen. In diesem Paragraphen wird die Frage nach einem e-folgenkompakten Abschluß für solche Mengen X untersucht, die sich als Vereinigung von Lösungsmengen von Differentialgleichungen schreiben lassen.

4.1 Definitionen, Bezeichnungen

4.1.1 Bezeichnungen:

Für $n \in \mathbb{N}$ sei:

$$1) \quad \Omega^n := \{ L: C^n(I) \rightarrow C(I) \mid Ly = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}, a_j \in C(I),$$

$$0 \leq j \leq n, \dim \text{Ker}(L) < \infty \},$$

ii) Für $L \in \Omega^n$ sei $\text{Ker}(L) := \{f \in C^n(I) \mid Lf = 0\}$
und für $\Omega \subset \Omega^n$ sei $\text{Ker}(\Omega) := \bigcup_{L \in \Omega} \text{Ker}(L)$

iii) Für $\Omega \subset \Omega^n$, $\Omega \neq \emptyset$ sei

$$\Omega_{\text{hom}} := \{a \in \Omega^n \mid L \in \Omega, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}.$$

iv) Für $g \in C^n(I)$ sei $d(g, L) := \inf_{f \in \text{Ker}(L)} \|g - f\|$.

4.1.2 Bemerkung:

$\theta \in \Omega^n$, weil $\text{Ker}(\theta) = C^n(I)$, also $\dim \text{Ker}(\theta) = \infty$;
es gilt nach ii) stets $\text{Ker}(\Omega) = \text{Ker}(\Omega_{\text{hom}})$.

4.1.3 Bezeichnung:

Sei $V = C(I)$ versehen mit $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\infty}$.

Auf $V^{n+1} := V \times \dots \times V$ ($(n+1)$ -mal) mit den
Spaltenvektoren $a = (a_0, \dots, a_n)^T$, $b = (b_0, \dots, b_n)^T$
werde die folgende (Abstands-)Funktion eingeführt:

$$d(a, b) := \max_{0 \leq j \leq n} \|a_j - b_j\|_{\infty}.$$

4.1.4 Bemerkung:

$d: V^{n+1} \times V^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ist (trivialerweise) Metrik auf V^{n+1} .

4.1.5 Definition:

Sei $a \in V^{n+1}$; dann bezeichne $L(a)$ den Operator

$$L(a) : C^n(I) \ni y \mapsto \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)} \in C(I)$$

Seine Ordnung $\text{ord}(L(a))$ ist $\max_{0 \leq j \leq n} \{a_j \mid a_j \neq 0\}$.

Damit ist jedem $a \in V^{n+1}$ ein Differentialoperator $L(a) \in \Omega^n$ zugeordnet. Umgekehrt gibt es zu jedem $L \in \Omega^n$ ein (nicht eindeutig bestimmtes) $a \in V^{n+1}$ mit $L = L(a)$ (Definition von Ω^n)

4.1.6 Bemerkung:

Für $a, b \in V^{n+1}$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt trivialerweise:

$$L(a+b) = L(a) + L(b), \quad L(\alpha a) = \alpha L(a).$$

4.1.7 Bezeichnung:

Für $A \subset V^{n+1}$ sei $L(A) := \{ L(a) \mid a \in A \} \subset \Omega^n$.

4.1.8 Definition:

Sei $A \subset V^{n+1}$ gegeben und $\theta \notin A$.

i) $S(A) := \{ a/d(a, \theta) \mid a \in A \}$ ist die zu A gehörige Einheitssphäre in V^{n+1} .

ii) Sei $\Omega := L(A)$. Dann heißt $S(\Omega) := \{ L(a) \mid a \in S(A) \}$ die zu Ω gehörige Einheitssphäre in Ω^n .

iii) $\Omega := L(A)$ heißt prae-kompakt (kompakt) $:= S(A)$ prae-kompakt (kompakt).

iv) Eine Folge $\{L_k\} \subset \Omega := L(A)$ heißt konvergent gegen $L_0 \in \Omega$ $:=$

$$\begin{aligned} & \vee \quad \vee \quad L_k = L(a_k), k \in \mathbb{N}, L_0 = L(a_0) \\ & \{a_k\} \subset A \quad a_0 \in A \quad \text{und } \lim a_k = a_0. \\ & \text{Folge} \end{aligned}$$

4.1.9 Bemerkung:

Sei $A \subset V^{n+1} \setminus \{\theta\}$ gegeben und $\Omega := L(A)$. Dann gilt

i) $\text{Ker}(L(A)) = \text{Ker}(S(\Omega))$ und

ii) Ω kompakt (prae-kompakt) $\Leftrightarrow S(\Omega)$ kompakt (prae-kompakt).

4.1.10 Definition:

Sei $A \in V^{n+1} \setminus \{0\}$, $A \neq 0$.

i) Für $a \in A$, $a = (a_0, \dots, a_n)^T$ heißt a_n Höchstkoeffizient, wenn $n = \max \{j \mid a_j \neq 0\}$ und $\text{ord}(a) := \text{ord}(L(a)) = n$.

ii) A heißt gewöhnlich (nicht singular) $:=$

$\forall$	$\varphi \in C(I) \setminus \{0\}$	$\forall$	$a = \varphi b$, Höchstkoeffi-
$a \in A$	$N(\varphi, I)$ endl.	$b \in A$	von b hat keine Null-
			stellen in I .

iii) $a \in A$ heißt gewöhnlich $:= \{a\}$ gewöhnlich.

4.1.11 Bemerkung:

A gewöhnlich bedeutet, daß jeder Operator aus $L(A)$ ein Fundamentalsystem besitzt, dessen Wronskideterminante auf ganz I nicht verschwindet.

4.2 e-Folgenkompaktheit bei Lösungsmengen von Differentialgleichungen

Die in den Beispielen des §1 angegebenen Approximationsfamilien lassen sich als Vereinigung von Lösungsmengen von Differentialgleichungen schreiben (im nichtrationalen Fall). In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, daß aus der Kompaktheit der Menge der Differentialgleichungen (unter den Voraussetzungen des §3) die e-Folgenkompaktheit der Approximationsfamilie folgt. Damit erhält man mit §3 Existenzaussagen für beste Approximationen.

4.2.1 Lemma:

- i) $y \in C^n(I)$, $a \in V^{n+1} \setminus \{0\}$.

Es gilt: $\|L(a)y\|_{\infty} \leq d(a,0) \sum_{j=0}^n \|y^{(j)}\|_{\infty}$.

- ii) $\{a_{(k)}\} \subset V^{n+1}$ konvergiere gegen $a_{(0)} \in V^{n+1} \setminus \{0\}$

$\{y_k\} \subset C^n(I)$ sei Folge und $y_0 \in C^n(I)$ so, daß

$y_k \in \text{Ker}(L(a_{(k)}))$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k^{(j)} - y_0^{(j)}\|_{\infty} = 0$

für alle $0 \leq j \leq n$.

Dann gilt: $y_0 \in \text{Ker}(L(a_{(0)}))$.

Beweis:

- i) trivial;

- ii) Folgt nach i) und den gestellten Voraussetzungen aus

$$\|L_0 y_0\| \leq \|L_0 y_0 - L_k y_0\| + \|L_k y_k - L_k y_0\| \quad (L_k := L(a_{(k)}), k \geq 0)$$

q.e.d.



4.2.2 Lemma:

Sei $\{a_{(k)}\} \subset V^{n+1} \setminus \{0\}$ konvergent gegen $a_{(0)} \in V^{n+1} \setminus \{0\}$.

Sei $\{y_k\} \subset C^n(I)$ eine Folge, die die Voraussetzungen von Satz 2.2.8 (oder auch von Satz 2.2.7) erfüllt

(also stückweise aus $C^{n+2}(I)$) . Gelte weiter $y_k \in \text{Ker}(L(a_k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann gilt:

$\forall \quad \forall \quad \forall \quad y_0 = e\text{-}\lim g_k \text{ und}$
 $\exists \mathbb{I} \quad \{g_k\} \subset \{y_k\} \quad y_0 \in C^n(I \setminus E) \quad L(a_{(0)})y_0 = 0 \text{ auf } I \setminus E.$
 $E \text{ endl. Teilfolge}$

Beweis:

$y_0 = e\text{-}\lim g_k \text{ und } y_0^{(i)} = e\text{-}\lim g_k^{(i)}$ gilt nach 2.2.8 .

In jedem Teilintervall, das keine Ausnahmepunkte enthält ist 4.2.1 anwendbar.

q.e.d.
 $\diamond$

Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird untersucht, wann $y_0 \in C^n(I)$ (und damit $y_0 \in \text{Ker}(L(a_{(0)}))$) gilt. Die Grundidee besteht darin, die Ausgangsfolge $\{y_k\}$ $(n+1)$ -mal hochzuintegrieren (man erhält dabei eine bis zur n -ten Ableitung gleichmäßig konvergente Folge $\{Y_k\}$ mit Grenzfunktion Y_0) und zu zeigen, daß die Grenzfunktion Y_0 einer geeigneten (inhomogenen) linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung genügt. Aus den Differenzierbarkeitseigenschaften der Koeffizienten und der rechten Seite dieser Differentialgleichung kann man dann auf Differenzierbarkeitseigenschaften von $Y_0^{(n)}$ und damit der e -Grenzfunktion der Folge $\{y_k\}$ schließen.

Diese Vorgehensweise geht auf H.WERNER[1969] zurück, wo sie im Fall der Approximation mit Exponentialsummen auf recht elegante Art die gewünschte Differenzierbarkeitseigenschaft der e -Grenzfunktion sicherstellte. Bei der Ausdehnung dieser Methode auf allgemeinere Differentialgleichungen muß man allerdings einigen technischen Aufwand bis zur Bereitstellung der geeigneten Differentialgleichung in Kauf nehmen.

Zunächst werden einige einfache Eigenschaften und Formeln zusammengestellt:

4.2.3 Lemma:

Sei $Ly = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}$ gegeben mit $a_j \in C^{s+j}(I)$, $s \geq 1$

Sei L^* der zu L (formal) adjungierte Operator,

also $L^*v = \sum_{j=0}^n (-1)^j (a_j v)^{(j)}$.

Sei $x^* \in I$ mit $a_n(x^*) \neq 0$ gegeben. Sei $I_0 \subset I$ ein abgeschlossenes Intervall mit nichtleerem Inneren und $x^* \in I_0$, $a_n(x) \neq 0$ für alle $x \in I_0$ (falls $x^* \notin \text{Rd}(I)$ sei I_0 so, daß x^* im Inneren von I liegt) (Existenz von I_0 wegen der Stetigkeit von a_n in I gesichert).

Es gilt:

- Jede Lösung von $Ly = 0$ auf I_0 ist Element aus $C^{n+s}(I_0)$.
- Die Lösung von $L^*v = 1$, $v^{(j)}(x^*) = \delta_{0j}$, $0 \leq j \leq n-1$ auf I_0 ist Element aus $C^{n+s}(I_0)$.
- Sei v_0 Lösung von $L^*v = 1$, $v^{(j)}(x^*) = \delta_{0j}$, $0 \leq j \leq n-1$. Sei $L^{(1)}$ ein Differentialoperator mit rekursiv definierten Koeffizienten a_{1j} :

$$a_{1n} := v_0 a_n$$

$$a_{1j} := v_0 a_j - a_{j+1}' , \quad j = n-1, \dots, 0$$

Dann gilt: $a_{1j} = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0 a_{i+j})^{(i)} \in C^{s+j}(I_0)$, $0 \leq j \leq n$,

und alle Lösungen von $L^{(1)}y = 0$ in I_0 liegen in $C^{n+s}(I_1)$, wobei $I_1 \subset I_0$ abgeschlossenes Intervall mit $v_0(x) \neq 0$ für alle $x \in I_1$,

- Sei $L^{(1)}$ wie in c) definiert und $y \in C^{n+1}(I_1)$. Dann gilt:

$$v_0 L y' = (L^{(1)} y)'$$

Beweis:

a) folgt aus $a_n(x) \neq 0$ in I_0 und $a_j \in C^S(I_0)$, $0 \leq j \leq n$.

$$b) \sum_{j=0}^n (-1)^j (a_j v)^{(j)} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \sum_{i=0}^{j-1} L^{(j)}(i) a_j^{(i)} v^{(i)}, \text{ und bei}$$

festem i gilt für alle auftretenden j :

$a_j^{(i-1)} \in C^{S+(-(j-1))}(I_0) = C^{S-1}(I_0) \subset C^S(I_0)$, der Höchstkoeffizient

von $L^* (-1)^j a_j$ ist $\neq 0$ in I_0 und mit a) folgt die Beh. .

$$c) a_{j,j-1} = v_0 a_{j-1} - a_{1,j} = v_0 a_{j-1} - \left(\sum_{i=0}^{n-j} (-1)^i (v_0 a_{i+j})^{(i)} \right)' =$$

(wegen der Induktionsannahme)

$$= (-1)^0 (v_0 a_{j-1})^{(0)} + \sum_{i=0}^{n-j} (-1)^{i+1} (v_0 a_{i+j})^{(i+1)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-(j-1)} (-1)^i (v_0 a_{i+j-1})^{(i)} \quad . \quad (\text{Induktionsbeginn } j=n \text{ trivial}).$$

Weil nach b) $v_0 \in C^{n+S}(I_0)$ und daher $v_0 a_{i+j} \in C^{S+i+j}(I_0)$ gilt stets $a_{1,j} \in C^{S+j}(I_0) \subset C^S(I_0)$ und die Differenzierbarkeitsordnung der Lösungen in I_1 folgt mit a).

$$d) v_0 LY' = \sum_{j=0}^n v_0 a_j Y^{(j+1)} = \sum_{j=0}^{n-1} (a_{1,j} + a'_{1,j+1}) Y^{(j+1)} + a_{1,n} Y^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{j=0}^n a_{1,j} Y^{(j+1)} + \sum_{j=1}^n a'_{1,j} Y^{(j)} = L^{(1)} Y' + \sum_{j=1}^n (a_{1,j} Y^{(j)})' -$$

$$- \sum_{j=1}^n a_{1,j} Y^{(j+1)} = a_{1,0} Y' + (L^{(1)} Y)' - (a_{1,0} Y)' = (L^{(1)} Y)' - a'_{1,0} Y.$$

Da aber $a_{1,0} = \sum_{i=0}^n (-1)^i (v_0 a_i)^{(i)} = L^* v_0 = 1$ folgt die Beh. .

q.e.d.

4.2.4 Korollar:

Sei $L^{(0)} y = \sum_{j=0}^n a_{0,j} y^{(j)}$ mit $a_{0,j} \in C^{S+j}(I)$, $0 \leq j \leq n$, $s \geq 1$ gegeben.

Dann gibt es zu jedem $l \in \mathbb{N}$ und jedem $x^* \in I$ mit $a_n(x^*) \neq 0$ ein abgeschlossenes Intervall I_1 mit

nichtleerem Inneren, $x \in I_1^0$ falls $x \notin \text{Rd}(I)$,
 Funktionen $v_0, \dots, v_{l-1} \in C^{1+s}(I_1)$ mit $v_j(x) \neq 0$
 in I_1 , $0 \leq j \leq l-1$
 und Differentialoperatoren $L^{(1)}, \dots, L^{(l)}$ der
 Ordnung n mit auf I_1 nullstellentreuen Höchst-
 koeffizienten und Koeffizienten $a_{ij} \in C^{0+s}(I_1)$,
 $1 \leq i \leq l$, $0 \leq j \leq n$,

so daß für $y \in C^{n+1}(I)$ gilt:

$$\bigwedge_{0 \leq j \leq l-1} v_j L^{(j)} y' = (L^{(j+1)} y)'.$$

Beweis:

Induktion nach $l \geq 1$.

$l=1$: Man konstruiere I_1, v_0 und $L^{(1)}$ gemäß 4.2.3 c)
 ausgehend von $L=L^{(0)}$. Nach 4.2.3 d) sind alle
 Eigenschaften erfüllt.

$l \rightarrow l+1$: Man konstruiere $I_{l+1}, v_1, L^{(l+1)}$ gemäß 4.2.3 c)
 ausgehend von $L=L^{(1)}$. Nach 4.2.3 d) folgt die
 Behauptung.

q.e.d.



Unter der Voraussetzung $s=1$ und $y \in C^{n+1}(I)$ erhält man
 in den Bezeichnungen von 4.2.4

4.2.5. Formel:

Sei $x_0 \in I$ (zunächst beliebig, aber fest),
 $s=1$ und $y \in C^{n+1}(I)$.

Dann gilt:

$L^{(1)} y(x) = G(1, y, x_0; x) + R(1, y, x_0; x)$, wobei
 G und R durch die Bezeichnung 4.2.6 festgelegt
 sind.

4.2.5 Bezeichnung:

$$G(l, Y, x_0; x) :=$$

$$= L^{(1)} Y(x_0) +$$

$$+ L^{(1-1)} Y'(x_0) \int_{x_0}^x v_{1-1}(x_{1-1}) dx_{1-1} +$$

$$\vdots$$

$$+ L^{(1)} Y^{(1-1)}(x_0) \int_{x_0}^x v_{1-1}(x_{1-1}) \int_{x_0}^{x_{1-1}} v_{1-2}(x_{1-2}) \int \dots \int_{x_0}^{x_2} v_1(x_1) dx_1 \dots$$

$$\text{dabei ist } dX_{1-1} := dx_1 \dots dx_{1-1} \quad .$$

$$R(l, Y, x_0; x) :=$$

$$= \int_{x_0}^x v_{1-1}(x_{1-1}) \int_{x_0}^{x_{1-1}} \dots \int_{x_0}^{x_2} v_1(x_1) \int_{x_0}^{x_1} v_0(t) L^{(0)} Y^{(1)}(t) dt dx_{1-1}$$

Result von 4.2.5:

Induktion nach l :

$$l=1 : L^{(1)} Y = L^{(1)} Y(x_0) + \int_{x_0}^x v_0(t) L^{(0)} Y'(t) dt \quad \text{gültig nach 4.2.4 ;}$$

$$l \rightarrow l+1 : L^{(l+1)} Y = L^{(l+1)} Y(x_0) + \int_{x_0}^x (L^{(l+1)} Y)'(x_1) dx_1$$

und das gewünschte Ergebnis erhält man sofort durch Multiplikation der Formel für l und Y' mit $v_1(x_1)$ und Integration nach x_1 . . . q.e.d.

4.2.7 Bemerkung:

Sei $x_0 \in I_1$, $s=1$, $Y \in C^{n+1}(I_1)$.

dann erhält man in den Bezeichnungen von 4.2.4

$G(l, Y, x_0; \cdot) \in C^{n+1+1}(I_1)$, da $v_j \in C^{n+1}(I_1)$ und

die auftretenden Integrale (mindestens) einmal mehr differenzierbar sind.

4.2.8 Bemerkung:

Gesetzt sei eine Folge $\{y_k\} \subset C(I)$ mit ε -Grenzfunktion $y_0 \in C(I \setminus E)$. Ferner sei $x_0 \in I \setminus E$ fest und $Y_{k,1}$ definiert durch:

$$k=0: \quad Y_{0,1}^{(1)}(x) = \int_{x_0}^x y_0(t) dt, \quad Y_{0,1}^{(j)}(x_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq 1-2$$

$$k \in \mathbb{N}: \quad Y_{k,1}^{(1)}(x) = y_k(x), \quad Y_{k,1}^{(j)}(x_0) = 0, \quad 0 \leq j \leq 1-1$$

Man erhält leicht (vgl. auch H. WERTHEF [1969], Seite 138):

$$\bigwedge_{0 \leq j \leq 1-1} \lim_{k \rightarrow \infty} Y_{k,1}^{(j)} = Y_{0,1}^{(j)} \quad (\|\cdot\|_{\infty, I}).$$

4.2.9 Bemerkung:

Unter den Voraussetzungen für die Gültigkeit der Bezeichnung 4.2.6 gilt:

$$\bigwedge_{x \in I} \lim_{k \rightarrow \infty} R(1, Y_{k,1}, x_0; x) = 0, \quad \text{falls } \{L^{(0)} Y_{k,1}\}$$

beschränkt und ε -konvergent gegen 0 (auf I).

Beweis: trivial ◇

Durch Zusammenfassung der bereitgestellten Ergebnisse erhält man die gewünschte Verschärfung von Lemma 4.2.2 :

4.2.10 Satz:

Sei $\{a_{(k)}\} \subset V^{n+1} \setminus \{\theta\}$ konvergent gegen $a_{(0)} \in V^{n+1} \setminus \{\theta\}$.
 $a_{(0)}$ sei gewöhnlich (Definition 4.1.10 iii)),
 also $a_{(0)} = \varphi b_{(0)}$. $L^{(0)} := L(b_{(0)})$ habe die Ordnung $1-1$ und Koeffizienten $b_{0,j} \in C^{1+j}(I)$, $0 \leq j \leq 1-1$ ($1 \geq 2$)
 Sei $\{y_k\}$, $y_k \in \text{Ker}(L(a_{(k)}))$ $k \in \mathbb{N}$ eine beschränkte
 $(\|\cdot\|_p)$, $1 \leq p \leq \infty$ Folge, die die Voraussetzungen von
 Satz 2.2.7 erfüllt.

Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \bigvee \\ \exists \subset I \quad \{g_k\} \subset \{y_k\} \quad y_0 \in C^{1-1}(I) \\ E \text{ endl. Teilfolge} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y_0 = e\text{-}\lim g_k \text{ mit Aus-} \\ \text{nahmengruppe } E, \\ L(a_{(0)})y_0 = \theta \text{ (auf } I \end{array}$$

Beweis:

Wegen der Gültigkeit von Lemma 4.2.2 muß nur noch die Differenzierbarkeit von y_0 auf E nachgewiesen werden. Sei also $x \in E$, I_1 , $v_0, \dots, v_{l-1}$ und $L^{(1)}, \dots, L^{(l)}$ (Ordnung $l-1$) gemäß Korollar 4.2.4 festgelegt. Sei $x_0 \in I_1 \cap E$ fest und $Y_{k,1}$, $k \in \mathbb{N}(0)$ wie in 4.2.6 definiert. Wegen $e\text{-}\lim L(a_{(0)})y_k = \theta$ und damit $e\text{-}\lim L^{(0)}y_k = \theta$ (mit Ausmenge $E \cup \{x \in I \mid \varphi(x) = 0\}$) gilt nach 4.2.9

$$\bigwedge_{x \in I} \lim_{k \rightarrow \infty} R(l, Y_{k,1}, x_0; x) = 0$$

und somit $L^{(1)}y_{0,1} = G(l, y_{0,1}, x_0; x)$ für alle $x \in I$.

$y_{0,1}$ ist also Lösung von $L^{(1)}y = G(l, y_{0,1}, x_0; x)$ auf I_1 und nach Bemerkung 4.2.7 und der Differenzierbarkeitseigenschaft der Koeffizienten von $L^{(1)}$ (vgl. 4.2.4) gilt $y_{0,1} \in C^{2l-1}(I_1)$ (vgl. 4.2.3 a) und damit $y_0 \in C^{1-1}(I_1)$.

q.e.d.



4.2.11 Bemerkung:

Daß man nicht etwa gleichmäßige (oder wenigstens punktweise) Konvergenz auf ganz I oder $\bar{I}$ gegen y_0 erhält, zeigt die Folge

$$y_k(x) := \exp(-k(x-z_0)^2), \quad k \in \mathbb{N}, \quad z_0 \text{ beliebig aus } I$$

Es gilt $\lim y_k(x) = 0$ für $x \neq z_0$ und $=1$ für $x = z_0$.

Die für Approximationszwecke wesentliche Aussage von 4.2.10 besteht darin, daß die e -Grenzfunktion Lösung der Grenzdifferentialgleichung ist. Diese Tatsache wird im nächsten

Paragraphen ausgenutzt, um die Erweiterung der vorgegebenen Approximationsmenge zu einer Existenzmenge zu beschreiben.

4.2.12 Korollar:

Sei $A \subset V^{n+1} \setminus \{0\}$ gewöhnlich und kompakt und
 $X := \text{Ker}(L(A))$ (Def. 4.1.1 ii, Bez. 4.1.7)
 Ferner gelte:

i) (Differenzierbarkeitseigenschaft)

Für alle $a_{(0)} \in A$, $a_{(0)} = \varphi a_{(0)}$ (dabei
 $\varphi = 1$ falls der Höchstkoeffizient keine Nullstellen in I besitzt) sei für den zugeordneten Differentialoperator $L^{(0)} = L(a_{(0)})$ die Differenzierbarkeitseigenschaft für die Koeffizienten aus 4.2.10 erfüllt.

ii) (Nullstellenbedingung)

$$N_0 \in \bigcap_{f \in X} \bigcap_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ j \text{ zulässig} \\ \text{für } f}} N(f^{(j)}, I) \leq N_0.$$

Dabei heißt j zulässig für f , wenn
 $j \leq 2 + \sup \{ \text{ord}(a) \mid a \in A, f \in \text{Ker}(L(a)) \}$.

Dann ist X beschränkt e -folgenkompakt ($\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$)
 (und damit proximal (Satz 3.2.3) bzw. sogar
 approximativ kompakt (Satz 3.2.5)).

Beweis:

Sei $1 \leq p \leq \infty$.

Sei $\{f_k\} \subset X$ beschränkte Folge. Es gibt eine Folge $\{a_{(k)}\} \subset A$ mit $f_k \in \text{Ker}(L(a_{(k)}))$ für $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von A darf angenommen werden, daß $\lim a_{(k)} = a_{(0)} \in A$ existiert und stets $\text{ord}(L(a_{(k)})) = l-1$ gilt (andernfalls gehe man zu einer Teilfolge von $\{a_{(k)}\}$ und entsprechend $\{f_k\}$ über). Es gilt $f_k \in C^{2l-1}(I) \subset C^{l+1}(I)$ (l ist ≥ 2 !)

für alle $k \in \mathbb{N}$ (weil A gewöhnlich und die Differenzierbarkeitseigenschaft 1) erfüllt ist), so daß für $\{f_k\}$ und $\{g_k\}$ alle Voraussetzungen von Satz 4.2.10 erfüllt sind. Wenn $a_{(0)}(A)$ gilt $y_0 \in X$ (y_0 wie in 4.2.10).

q.e.d.



Eine besonders einfache Anwendung von Korollar 4.2.12 ergibt sich bei der Approximation im Raum P_n der Polynome vom Höchstgrad n :

4.2.13 Beispiel:

P_n ist proximal, denn $A := \{(0, \dots, 0, 1)^T\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ ist kompakt, $P_n = \text{Ker}(L(A))$ und die Nullstellenbedingung ist trivialerweise erfüllt.



Es stellt sich natürlich die Frage, wie schwer die Voraussetzungen von Korollar 4.2.12 in konkreten Fällen nachzuprüfen sind. Die Differenzierbarkeitseigenschaft ergibt sich im allgemeinen schon aus der Problemstellung. Die Kompaktheit von A ist unproblematisch, wenn man die Anwendung des Korollars auf solche Fälle einschränkt, bei denen die Projektionen von A auf V Teilmengen endlichdimensionaler Unterräume des $C(I)$ sind. Das eigentliche Problem besteht im Nachweis der Nullstellenbedingung. Im nächsten Abschnitt werden einige Sätze aus der Literatur zusammengestellt, die für Nullstellenuntersuchungen bei Lösungen von Differentialgleichungen gut geeignet sind.

4.2 Ergänzende Sätze aus der Literatur

Eingehende Untersuchungen über Nullstellen bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen finden sich bei W.A.COPPEL [1971]. Mit ihrer Hilfe wird zunächst eine Nullstelleneigenschaft (4.3.6) bewiesen, die bei Nullstellenuntersuchungen für allgemeine Exponentialsummen im §5 herangezogen wird.

Satz 4.3.3 von H.CEDEX[1965] liefert sofort eine Nullstellenaussage bei Polynom-Exponentialsummen (§5) und Satz 4.3.10 von L.H.HAINES und L.M.SILVERMAN[1968] beziehungsweise

Korollar 4.3.11 wird bei Untersuchungen über die Zulässigkeit von Folgen allgemeiner Exponentialsummen im §5 angewendet.

4.3.1 Definition (W.A.COPPEL[1971]):

Sei L ein linearer Differentialoperator mit Höchstkoeffizient 1 und Ordnung n .

L heißt diskonjugiert auf dem Intervall I , wenn jede nichttriviale Lösung von $Ly=0$ höchstens $n-1$ Nullstellen in I besitzt (Nullstellen sind in ihrer Vielfachheit zu zählen).

4.3.2 Lemma:

Sei I kompaktes Intervall, L wie in 4.3.1.

Dann gilt:

Es gibt ein $\delta > 0$, so daß L auf jedem Teilintervall $I_1 \subset I$ mit $\mu(I_1) < \delta$ ($\mu(I_1)$ Länge von I_1) diskonjugiert ist.

Beweis: W.A.COPPEL[1971], Prop. 1, Seite 81.



4.3.3 Korollar:

I und L wie in 4.3.2.

$\delta_0 := \sup \{ \delta > 0 \mid \delta \text{ erfüllt Lemma 4.3.2} \}$

und $r_0 := \inf \{ r \in \mathbb{N} \mid r^{-1} \mu(I) < \delta_0 \}$.

Dann gilt:

Jede nichttriviale Lösung von $Ly=0$ hat höchstens $r_0(n-1)$ Nullstellen in I .

Beweis:

Sei y nichttriviale Lösung. Seien $I_1, \dots, I_{r_0} \subset I$ Intervalle mit $I = I_1 \cup \dots \cup I_{r_0}$ und $\mu(I_j) = r_0^{-1} \mu(I)$, $1 \leq j \leq r_0$. Dann ist L diskonguiert auf jedem der r_0 Teilintervalle (4.3.2) und y besitzt daher höchstens $r_0(n-1)$ Nullstellen in I .

q.e.d.

◇

Eine gewisse Verallgemeinerung des Satzes von Rolle gibt

4.3.4 Lemma:

Sei L (wie in 4.3.1) diskonguiert auf I und $g \in C^n(I)$ habe mindestens $n+1$ Nullstellen in I (die nicht alle zusammenfallen).

Dann hat Lg mindestens eine Nullstelle in I . $\square$

Beweis: W.A.COPPEL[1971], Prop.7, Seite 94.

◇

4.3.5 Korollar:

Sei L wie in 4.3.4 (insbesondere diskonguiert) und $g \in C^n(I)$ habe mindestens $(n+1)r$ verschiedene Nullstellen in I .

Dann hat Lg mindestens r verschiedene Nullstellen in I .

Beweis:

Man unterteile I_0 in r Teilintervalle $I_1, \dots, I_r$ mit $I = I_1 \cup \dots \cup I_r$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $N(g, I_j) \geq n+1$ für $1 \leq j \leq r$ (vgl. Bez.2.2.1). Die Voraussetzungen von 4.3.4

sind in jedem Teilintervall erfüllt und die Behauptung folgt unmittelbar.

q.e.d.



4.3.6 Nullstelleneigenschaft:

Sei L Differentialoperator mit Höchstkoeffizient 1 und Ordnung $n \in \mathbb{N}_0$ und r_0 seien wie in Lemma 4.3.2 definiert.

Dann gilt:

- i) Jede nichttriviale Lösung von $Ly=0$ hat höchstens $(n-1)r_0$ Nullstellen in I .
- ii) Sei $\{g_k\} \subset C^n(I)$ eine Folge, $Lg_k \neq 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ und $\limsup N(g_k, I) = \infty$. Dann ist auch $\limsup N(Lg_k, I) = \infty$.

Beweis:

i) Korollar 4.3.3.

ii) Nach Unterteilung von I wie in Korollar 4.3.3 (also L disjunkuiert auf jedem Teilintervall) folgt die Behauptung unmittelbar aus Korollar 4.3.5.

q.e.d.



Eine Abschätzung von δ aus Lemma 4.3.2 gibt:

4.3.7 Lemma:

Sei $Ly = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y$ gegeben und gelte $|p_j(t)| \leq M_j$ für $1 \leq j \leq n$ und alle $t \in I$.

Dann ist L disjunkuiert auf I , wenn

$$\chi(\mu(I)/2) \leq 1, \text{ wobei}$$

$$\chi(h) := \sum_{j=1}^n \frac{M_j h^j}{j \left[\left(\frac{j-1}{2} \right)! \left(\frac{j}{2} \right)! \right]}.$$

Beweis: W.A.COPPEL[1971], Theorem 1, Seite 86



Für Differentialgleichungen der speziellen Form

$$L(D)y = (D+\lambda_n(x))(D+\lambda_{n-1}(x))\dots(D+\lambda_1(x))y = 0$$

gilt:

4.3.8 Satz:

Sei $L(D)$ wie oben mit $\lambda_j \in C^{(n-j)}([a,b])$.

Dann hat jede nichttriviale Lösung von $L(D)y=0$ höchstens $n-1$ Nullstellen in $[a,b]$.

Beweis: M.ZEDEX[1965], Theorem 4, Seite 84.

◊

4.3.9 Bemerkung:

Für die Approximation mit der Lösungsmenge einer solchen Differentialgleichung gibt es scharfe Fehlerabschätzungen vom Bernstein-Typ $((L_p[-1,1], \|\cdot\|_p), 1 \leq p \leq \infty \text{ und } (C(I), \|\cdot\|_\infty))$. Näheres dazu findet man bei M.ZEDEX[1966] und R.A.De VORE[1975].

Der folgende, auf L.H.HAINES und L.M.SILVERMAN zurückgehende Satz spielt eine Rolle bei der Untersuchung der Zulässigkeit von Folgen.

4.3.10 Satz:

Sei $C \in \mathbb{R}^+$ gegeben und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall von positivem Maß, $n \in \mathbb{N}$.

$$\Omega^n(C) := \{L \mid Ly = y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} g_j(x)y^{(j)}, g_0, \dots, g_{n-1} \in C(I), \|\cdot\|_\infty \leq C, 0 \leq j \leq n-1\}$$

Dann gilt:

$$\bigvee_{K \in \mathbb{R}^+} \bigwedge_{f \in \text{Ker}(\Omega^n(C))} \bigwedge_{0 \leq i \leq n} \|f^{(i)}\|_\infty \leq K \|f\|_\infty.$$

(Definition von $\text{Ker}(\Omega^n(C))$ wie in 4.1.1)

Beweis:

Der Beweis von Theorem 1 in L.H. BAINES, L.M. SILVERMAN [1968] läßt diese etwas allgemeinere Formulierung von Theorem 1 zu.

q.e.d.



4.3.11 Korollar:

Jede beschränkte $(\|\cdot\|_\infty)$ Teilmenge von $\text{Ker}(\Omega^n(C))$ ist gleichgradig stetig.

Beweis:

Sei $K \in \text{Ker}(\Omega^n(C))$ und $M \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f\| \leq M$ für alle $f \in X$. Sei K die oben angegebene Konstante, $x_0 \in I$ und $\epsilon > 0$ gegeben. Sei $\delta := \epsilon / (KM + 1)$. Sei $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $f \in X$ gegeben.

Dann gilt:

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| |f'(\xi)| \leq \delta \|f'\| \leq \delta K \|f\| \leq \delta KM < \epsilon.$$

q.e.d.



4.4 "Optimale" Differentialoperatoren

Das Korollar 4.2.12 zeigt eine Möglichkeit auf, wie man von einer gegebenen Approximationsmenge X_0 (die wie in den Beispielen aus 4.2 noch nicht proximal ist) zu einer proximalen Erweiterung X von X_0 kommt. Kann man nämlich $X_0 = \text{Ker}(L(A_0))$ mit einer präkompakten "Parametermenge" $A_0 \subset V^{n+1}$ versehen, so muß man nur A_0 kompaktifizieren (Ergebnis A) und $X := \text{Ker}(L(A))$ als die gesuchte Erweiterung betrachten.

Die Voraussetzungen von Korollar 4.2.12 sind in vielen Fällen noch relativ leicht zu verifizieren. Die explizite Angabe der Lösungsmengen der bei der Kompaktifizierung neu hinzugekommenen Differentialgleichungen wird aber im allgemeinen ein erhebliches Problem darstellen. Im §5 wird dieses Problem für Spezialfälle weiter untersucht.

Im vorliegenden Abschnitt soll aber noch ein anderer Aspekt aufgezeigt werden. Im allgemeinen wird die "Parametermenge" A eine viel einfachere Struktur haben, als die Funktionenmenge $\text{Ker}(L(A))$ (prägnantes Beispiel: gewöhnliche Exponentialsummen). Es scheint daher sinnvoll zunächst optimale Elemente in A zu charakterisieren und erst dann den Übergang zur Lösungsmenge der entsprechenden Differentialgleichung zu vollziehen.

Die in diesem Zusammenhang auftretenden Fragen sollen hier nicht weiter vertieft werden. Um aber die generelle Möglichkeit von solchen Charakterisierungen aufzuzeigen, wird im folgenden eine einfache Charakterisierung angegeben.

4.4.1 Definition:

Sei $L \in \Omega^n$, $g \in C^n(I) \setminus \text{Ker}(L)$ und $\|\cdot\|$ eine beliebige, aber fest vorgegebene Norm auf $C(I)$.

Dann sei:

$$\|L\|_g := \|Lg\| / d(g, L) .$$

4.4.2 Bemerkung:

$\|L\|_g$ ist die übliche Operatornorm, wenn man L auf den Teilraum $X_{L,g} := \text{span}\{g\} \oplus \text{Ker}(L)$ einschränkt, d.h.

$$\|L\|_g = \sup_{\substack{f \in X_{L,g} \\ f \neq 0}} \frac{\|Lf\|}{\|f\|}.$$

Beweis:

Sei $y_L \in {}^P\text{Ker}(L)(g)$ ($\neq \emptyset$, da $\dim \text{Ker}(L) < \infty$) (vgl. 3.1.1)

Mit $f_L \in \text{Ker}(L)$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\|Lg\|}{d(g,L)} &= \frac{\|L(g-y_L)\|}{\|g-y_L\|} \leq \sup_{f \neq 0} \frac{\|Lf\|}{\|f\|} = \sup \frac{\|L(ag+f_L)\|}{\|ag+f_L\|} = \\ &= \sup_{z \in \text{Ker}(L)} \frac{\|Lg\|}{\|g-z\|} = \frac{\|Lg\|}{d(g,L)} \end{aligned}$$

q.e.d.



4.4.3 Definition (vgl. auch Definition 4.1.1):

Sei $\Omega \subset \Omega^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $g \in C(I) \setminus \text{Ker}(\Omega)$.

i) $\Omega_g := \{ L \in \Omega_{\text{hom}} \mid \|L\|_g = 1 \}$

ii) $\Omega_g^{\min} := \{ L_0 \in \Omega_g \mid \|L_0 g\| = \inf_{L \in \Omega_g} \|Lg\| \}$.

4.4.4 Bemerkung:

- a) $\text{Ker}(\Omega) = \text{Ker}(\Omega_{\text{hom}}) = \text{Ker}(\Omega_g)$ (trivial wie in 4.1.2)
- b) $L \in \Omega_g \Leftrightarrow \|Lg\| = d(g,L)$ (trivial nach Definition)
- c) Für alle $\Omega \subset \Omega^n$, $\Omega \neq \emptyset$ gilt:

$$d(g,\Omega) = \inf_{L \in \Omega} d(g,L).$$

Beweis:

$\text{Ker}(L) \subset \text{Ker}(\Omega) \Rightarrow d(g,L) \geq d(g,\Omega)$. Annahme: $d(g,L) > d(g,\Omega)$.

Dann existiert ein $y \in \text{Ker}(\Omega)$ und damit ein $L \in \Omega$ mit $y \in \text{Ker}(L)$ und

$$\inf_{L \in \Omega} d(g, L) > d(g, y) \geq d(g, L)$$

Widerspruch!

q.e.d.

◇

Die eigentliche Aussage wird durch das folgende Lemma vorbereitet.

4.4.5 Lemma:

Sei $\Omega \subset \Omega^n$, $\Omega \neq \emptyset$ und $g \in C(I) \setminus \text{Ker}(\Omega)$.

Dann gilt:

$$L_0 \in \Omega_g^{\min} \Leftrightarrow d(g, L_0) = d(g, \Omega) \quad , \quad L_0 \in \Omega_g \quad .$$

Beweis:

$$L_0 \in \Omega_g^{\min} \Leftrightarrow L_0 \in \Omega_g \quad \text{und} \quad \|L_0 g\| = \inf_{L \in \Omega_g} \|L g\| =$$

$$= \inf_{L \in \Omega_g} d(g, L) = d(g, \Omega_g) = d(g, \Omega)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ 4.4.4 \text{ b)} & & 4.4.4 \text{ c)} \quad 4.4.4 \text{ a)} \end{array} \quad \text{q.e.d.}$$

◇

Damit erhält man

4.4.6 Satz:

Sei $\Omega \subset \Omega^n$, $\Omega \neq \emptyset$, $g \in C(I) \setminus \text{Ker}(\Omega)$.

Dann gilt:

$$P_{\text{Ker}(\Omega)}(g) = \bigcup_{L_0 \in \Omega_g^{\min}} P_{\text{Ker}(L_0)}(g) \quad ,$$

$$\text{also insbesondere } P_{\text{Ker}(\Omega)}(g) \neq \emptyset \Leftrightarrow \Omega_g^{\min} \neq \emptyset \quad .$$

4.4.4 a)

"c" : $y \in P_{\text{Ker}(\Omega)}(g) = P_{\text{Ker}(\Omega_g)}(g) \Rightarrow$
 $y \in \text{Ker}(\Omega_g)$ und $d(g, y) = d(g, \Omega_g) = d(g, \Omega) \Rightarrow$
 es existiert $L_y \in \Omega_g$ mit $y \in P_{\text{Ker}(L_y)}(g) \cap P_{\text{Ker}(\Omega)}(g) \Rightarrow$
 $d(g, L_y) = d(g, y) = d(g, \Omega) \Rightarrow$
 4.4.5

$y \in \bigcup_{L_0 \in \Omega_g}^{\min} P_{\text{Ker}(L_y)}(g) \Rightarrow y \in \bigcup_{L_0 \in \Omega_g}^{\min} P_{\text{Ker}(L_0)}(g)$

"b" : $y \in \bigcup_{L_0 \in \Omega_g}^{\min} P_{\text{Ker}(L_0)}(g) \Rightarrow$ es gibt $L_y \in \Omega_g^{\min}$ mit
 $y \in P_{\text{Ker}(L_y)}(g) \Rightarrow \text{ex. } L_y \in \Omega_g^{\min} : d(g, y) = d(g, L_y) =$

$\|L_y g\| = \inf_{L \in \Omega_g} \|Lg\| = \inf_{L \in \Omega_g} d(g, L) = d(g, \Omega_g) = d(g, \Omega),$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $L_y \in \Omega_g^{\min} \quad \quad \quad 4.4.4 \text{ b)} \quad \quad \quad 4.4.4 \text{ c)} \quad \quad \quad 4.4.4 \text{ a)}$

und es folgt $y \in P_{\text{Ker}(\Omega)}(g) \quad \quad \quad \text{q.e.d.}$
 $\diamond$

4.4.7 Bemerkung:

Satz 4.4.6 beinhaltet, daß man nach geeigneter "Normierung" der Differentialgleichungen (d.h. Übergang von Ω zu Ω_g) zur Bestimmung der "optimalen" Differentialgleichung nur $\|Lg\|$ über Ω_g zu minimieren hat. Anschließend ist dann lediglich noch ein endlichdimensionales Approximationsproblem zu lösen.

Anders aufgefaßt, wird das ursprüngliche Approximationsproblem zurückgeführt auf zwei Probleme:

Problem 1 : Finde die beste Approximation an $\theta \in C(I)$ in der Menge $X_g := \{ Lg \mid L \in \Omega_g \}$

Problem 2 : Ist $f \in X$, $f = L_0 g$ Lösung von Problem 1, so
finde man $f_0 \in \text{Ker}(L_0)$ mit $\|f_0 - g\| = d(g, L_0 \dots$

Das Problem 2 ist stets ein endlichdimensionales Approximationsproblem. Zu untersuchen bleibt, wann das Problem 1 einfacher zu lösen ist, als das Ausgangsproblem.

Im Fall der Approximation mit gewöhnlichen Exponentialsummen ist auch das Problem 1 ein endlichdimensionales Problem (im $\text{span}\{g, g', \dots, g^{(n)}\}$), allerdings mit (nichtlinearen) Einschränkungen an die Koeffizienten.

§ 5 Über die Lösung der Grenzdifferentialgleichungen

in Spezialfällen

- 5.1 Einige Formeln und Hilfsmittel
- 5.2 Eine Differentialgleichung für allgemeine Exponentialsummen
- 5.3 Zur Lösung der Grenzdifferentialgleichung bei allgemeinen Exponentialsummen

Satz 4.2.10 hat gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die e -Grenzfunktion einer geeigneten Folge Lösung einer Grenzdifferentialgleichung ist. Diese Tatsache kann man ausnutzen, um bei entsprechenden Problemen die (eventuell nötige) Erweiterung der vorgegebenen Approximationsmenge zu einer Existenzmenge zu beschreiben. Dabei stellt sich die Aufgabe, die Grenzdifferentialgleichungen explizit zu lösen, was natürlich nur in Spezialfällen möglich sein wird.

Der vorliegende Paragraph beschäftigt sich mit dieser Frage für die Grenzdifferentialgleichungen bei "allgemeinen Exponentialsummen" (Definition 5.1.5). Für diesen Fall wird eine generelle Methode angegeben, die zwar nicht immer bis zur expliziten Angabe aller Lösungen führt, aber doch für konkrete Aufgaben, die entsprechenden Untersuchungen erleichtert.

5.1 Einige Formeln und Hilfsmittel

Zunächst soll eine Formel für $(e^{f(x)})^{(j)}$ hergeleitet werden. Sie kann benutzt werden, um die Fundamentalsysteme der

Differentialgleichungen aus Satz 5.2.2 anders zu beschreiben
 und spielt eine Rolle bei Untersuchungen der algebraischen
 Mannigfaltigkeit im Abschnitt 5.3 .

Als Vorbereitung für die Formel dient:

5.1.1 Lemma:

i) Für $j, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f \in C^j(I)$ sei

$$Q_{jl} := \sum_{\sigma=0}^l \sum_{\kappa=0}^{l-\sigma} \frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} f^{(\kappa)}(f^{(\sigma)})(j) .$$

Dann gilt für alle $j \geq 0$, $l \geq 1$:

$$Q'_{jl} = Q_{j+1, l-1} - f' Q_{jl-1} .$$

ii) Für alle $l \geq 0$ gilt: $Q_{0l} = 1$.

Beweis: zu i):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Q_{jl} &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{\sigma=0}^{l-1} \sum_{\kappa=0}^{l-\sigma} \left(\frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} \right) f^{(\kappa)}(f^{(\sigma)})(j) + (f^{l-1}/l!)^{(j)} \right) = \\ &= \sum_{\sigma=0}^{l-1} \sum_{\kappa=0}^{l-\sigma} \left(\frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} \right) f^{(\kappa)}(f^{(\sigma)})(j+1) + \\ &+ \sum_{\sigma=0}^{l-1} \sum_{\kappa=1}^{l-\sigma} \left(\frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} \right) \kappa f' f^{\kappa-1}(f^{(\sigma)})(j) = Q_{j+1, l-1} - f' Q_{jl-1} . \end{aligned}$$

q.e.d.

ii) : Induktion: $l=0$ trivial.

$$\begin{aligned} l \rightarrow l+1 : & \sum_{\sigma=0}^{l+1} \sum_{\kappa=0}^{l+1-\sigma} \left(\frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} \right) f^{\sigma+\kappa} = \\ &= \sum_{\sigma=0}^l \left(\sum_{\kappa=0}^{l-\sigma} \left(\frac{(-1)^\kappa}{\kappa! \sigma!} \right) f^{\sigma+\kappa} + \left(\frac{(-1)^{l+1-\sigma}}{\sigma! (l+1-\sigma)!} \right) f^{l+1} \right) + \end{aligned}$$

$$+ ((-1)^0 / 0! (1+1)!) f^{1+1} = \left(\sum_{\sigma=0}^{1+1} ((-1)^{1+1-\sigma} / \sigma! (1+1-\sigma)!) \right) f^{1+1} + 1=1,$$

$$\text{da } \sum_{\sigma=0}^{1+1} ((-1)^{1+1-\sigma} / \sigma! (1+1-\sigma)!) = (1 / (1+1)!) \sum_{\sigma=0}^{1+1} (-1)^{1+1-\sigma} \binom{1+1}{\sigma} = 0$$

(vgl. Formelsammlung, z.B. H.J.BARTSCH[1967], Seite 36) .

q.e.d.



5.1.2 Formel:

Sei $f \in C^j(I)$ und $P_j := e^{-f}(e^f)^{(j)}$ für $j \geq 0$.

Dann gilt:

$$\bigwedge_{j \geq 0} \bigwedge_{l \geq j} P_j = \sum_{\sigma=0}^1 \sum_{\kappa=0}^{1-\sigma} ((-1)^\kappa / \kappa! \sigma!) f^\kappa (f^\sigma)^{(j)} = Q_{j1}.$$

Beweis:

Nach Festlegung gilt $P_0=1$ und $P_{j+1}=f'P_j+P_j'$.

Die Formel wird mit Induktion nach j bewiesen.

$j=0$: $1=P_0=Q_{01}=1$ für alle $l \geq 0$ (Lemma 5.1.1 ii)).

$j \rightarrow j+1$: Sei $l \geq j+1$.

Nach Lemma 5.1.1 i) gilt: $Q_{j+1, l} = f'Q_{j, l-1} + Q_{j, l}' = f'P_j + P_j'$,
(Induktionsvoraussetzung und $l-1 \geq j$).

q.e.d.



5.1.3 Lemma:

Sei $Ly = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}$ gegeben. Für $h \in C^n(I)$ sei dann

$$L(D-h')y := \sum_{j=0}^n a_j (D-h')^j y, \text{ wobei}$$

$$(D-h')^0 y := y \text{ und } (D-h')^{j+1} y := (D-h')^j (y' - h'y).$$

Dann gilt für $f, g, h \in C^n(I)$:

i) $(D-h')^j (g e^h) = g^{(j)} e^h$ (M.BESTEHORN[1975])

ii) $L(D-h')(g e^f) = e^h L(g e^{f-h})$.

Beweis: zu i) :

Induktion nach j (vgl. M.BESTENHORN [1975], Lemma 2.1, Seite 8).

$$\begin{aligned} \text{ii) : } L(D-h')ge^f &= L(D-h')((ge^{f-h})e^h) = \sum_{j=0}^n a_j(D-h')^j((ge^{f-h})e^h) \\ &= \sum_{j=0}^n a_j e^h (ge^{f-h})(j) = e^h L(ge^{f-h}) . \end{aligned}$$

q.e.d.
◊

5.1.4 Bemerkung:

Die Gültigkeit der Formel 5.1.2 für alle $j \geq 0$ ermöglicht die Aussage:

$$Lge^f = e^f \left(\sum_{\sigma=0}^n \sum_{\kappa=0}^{n-\sigma} ((-1)^\kappa / \kappa! \sigma!) f^\kappa Lg f^\sigma \right) \quad \text{für } f, g \in C^n(I).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} L(ge^f) &= \sum_{j=0}^n a_j (ge^f)(j) = \\ &= \sum_{j=0}^n a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} g^{(j-i)} \sum_{\sigma=0}^n \sum_{\kappa=0}^{n-\sigma} ((-1)^\kappa / \kappa! \sigma!) f^\kappa (f^\sigma)(i) e^f = \\ &= e^f \sum_{\sigma=0}^n \sum_{\kappa=0}^{n-\sigma} ((-1)^\kappa / \kappa! \sigma!) f^\kappa \sum_{j=0}^n a_j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} g^{(j-i)} (f^\sigma)(i) = \\ &= e^f \sum_{\sigma=0}^n \sum_{\kappa=0}^{n-\sigma} ((-1)^\kappa / \kappa! \sigma!) f^\kappa L(g f^\sigma) . \end{aligned}$$

q.e.d.
◊

Im nächsten Abschnitt wird die Formel ii) aus 5.1.3 ausgenutzt, um rekursiv eine Differentialgleichung für allgemeine Exponentialsummen aufzustellen. dazu noch

5.1.5 Definition (allgemeine Exponentialsummen):

Für $m \in \mathbb{N}$ seien $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(I)$ fest vorgegeben.

Sei $P := \text{span} \{f_1, \dots, f_m\}$. Gelte $1 \notin P$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei dann

$$X_{n,m}^0 := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(t_{j1}f_1 + \dots + t_{jm}f_m) \mid \alpha_j, t_{ji} \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m \right\},$$

und $X_{n,m} := \overline{X_{n,m}^0}$ (Abschluß in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$).

a) $f \in X_{n,m}$ heißt allgemeine Exponentialsumme (AES),
 $f \in X_{n,m}^0$ heißt eigentliche allgemeine Exponentialsumme

b) Im Fall $f_j(x) = x^j$ für $1 \leq j \leq m$ werden die allgemeinen Exponentialsummen Polynom-Exponentialsummen oder kurz PES genannt.
 Gilt zusätzlich $m=1$, so wird von gewöhnlichen Exponentialsummen gesprochen.

5.1.6 Bemerkung:

Die Voraussetzung $f_1, \dots, f_m \in C^\infty(I)$ ist willkürlich und könnte im Einzelfall abgeschwächt werden.

5.1.3 Eine Differentialgleichung für allgemeine

Exponentialsummen

Für $z(x) = \sum_{j=1}^n a_j y_j(x)$, $y_j \in C^n(I)$ kann man unter gewissen Voraussetzungen in die Wronskideterminante $W(y_1, \dots, y_n)$ formal sofort eine Differentialgleichung L angeben, für die bei beliebiger Vorgabe $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $z \in \text{Ker}(L)$ gilt, nämlich $W(y, y, \dots, y_n)$. Geht man nun von einer Folge $\{z_k\}$ aus, und betrachtet man die so gewonnenen Differentialoperatoren L_k , so wird man i.a. (sofern Konvergenz von $\{L_k\}$ gegen L_0 vorliegt) die Grenzdifferentialgleichung L_0 nicht explizit angeben können. Man kann also erst recht nicht damit rechnen, die Lösungsmenge von L_0 explizit angeben zu können. Daher ist es durchaus sinnvoll Differentialoperatoren L_k zu betrachten, für die zwar $\text{Ker}(L_k) \not\subseteq \text{Ker}(L_0)$ gilt, die aber dafür die explizite Angabe der Grenzdifferentialgleichung L_0 gestatten. Man weiß dann, in welcher Klasse die gesuchten Grenzfunktionen liegen und hat die Möglichkeit, durch gezielte Untersuchungen weitere Einschränkungen zu beweisen (vgl. dazu auch das Beispiel in §6.4).

Der vorliegende Abschnitt schließt an die Untersuchungen von M. BESIENCKI [1975] an und verallgemeinert die dort gewonnenen Ergebnisse.

5.2.1 Bezeichnung:

Sei $m \in \mathbb{N}$, F wie in 5.1.5, $T = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ bzw. $T_j = (t_{j1}, \dots, t_{jm}) \in \mathbb{R}^m$. Sei dann $p(T) = t_1 f_1 + \dots + t_m f_m$ bzw. $p(T_j) = t_{j1} f_1 + \dots + t_{jm} f_m$.

Ferner sei generell vereinbart, daß die in den folgenden Betrachtungen auftretenden Summen $\sum_j \exp(p(T_j))$ stets nur für linear unabhängige Funktionen $\exp(p(T_1)), \dots, \exp(p(T_m))$ gebildet seien.

5.2.2 Satz:

Sei in den Bezeichnungen von 5.2.1 $p_j := p(T_j)$ und $\exp(p_1), \dots, \exp(p_n)$ linear unabhängig. Dann genügt jede Summe der Form $\sum \alpha_j \exp(p_j)$ der Differentialgleichung

$$L_n(D-p'_n) \circ \dots \circ L_1(D-p'_1)y = 0,$$

wobei

$L_1 := D (= \frac{d}{dx})$ und für $2 \leq j \leq n$ L_j so, daß $\text{span} \{ L_{j-1}(D+h'_{j-1}) \circ \dots \circ L_1(D+h'_1)(1) \mid h_1, \dots, h_{j-1} \in \mathbb{F} \} \subset \text{Ker}(L_j)$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß $\exp(p_j)$ Lösung von

$$L_j(D-p'_j) \circ \dots \circ L_1(D-p'_1)y = 0.$$

Dazu:

$$\begin{aligned} L_j(D-p'_j) \circ \dots \circ L_1(D-p'_1) \exp(p_j) &= L_j(D-p'_j) \circ \dots \circ L_1(D-p'_1) \exp(p_j - p_1 + p_1) = \\ &= L_j(D-p'_j) \circ \dots \circ L_2(D-p'_2) (\exp(p_2) (\exp(p_1 - p_2) L_1 \exp(p_j - p_1))) = \\ 5.1.3ii \quad &= L_j(D-p'_j) \circ \dots \circ L_3(D-p'_3) (\exp(p_2) L_2 \exp(p_1 - p_2) L_1 \exp(p_j - p_1)) = \\ &= \dots = \exp(p_j) L_j \exp(p_{j-1} - p_j) L_{j-1} \exp(p_{j-2} - p_{j-1}) \dots L_1 \exp(p_j - p_1) = \\ &= \exp(p_j) L_j (L_{j-1}(D+h'_{j-1}) \circ \dots \circ L_1(D+h'_1)(1)) = 0, \text{ dabei} \\ \text{gilt } h_i &:= p_j - p_i. \end{aligned}$$

q.e.d.



Satz 5.2.2 baut also aus festen Differentialgleichungen $L_1, \dots, L_n$ eine Differentialgleichung auf, die eine vorgegebene Exponentialsumme als Lösung hat. Bei Konvergenz von $\{p_{j_k}\}$ gegen p_{j_0} , $1 \leq j \leq n$ erhält man als Grenzdifferentialgleichung trivialerweise

$$L_n(D-p'_{n0}) \circ \dots \circ L_1(D-p'_{10})y = 0,$$

deren Lösungen sich wieder rekursiv angeben lassen.

5.2.3 Bemerkung:

$L(D-h')y = 0$ hat die Lösungen $e^{h \text{Ker}(L)} = \{ e^{hy} \mid y \in \text{Ker}(L) \}$

Beweis: $L(D-h')y = 0 \Rightarrow (5.1.3 \text{ ii}) e^{hy} e^{-h} = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow ye^{-h} = z \in \text{Ker}(L) .$ q.e.d. $\diamond$

Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft gibt:

5.2.4 Lemma:

Gelte $\lim \| p_k \| = \infty$ und $\lim p_k / \| p_k \| = p_0$.

Dann gilt:

$$\| p_k \|^{-n} L(D-p'_k)y = a_n (-1)^n p'_0 y$$

Dabei ist a_n der Höchstkoeffizient von L .

Beweis: Durch Induktion zeigt man leicht: $a^j (D+h')^j =$
 $(aD+ah')^j$ für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \| p_k \|^{-n} L(D-p'_k)y &= \| p_k \|^{-n} \sum_{j=0}^n a_j (D-p'_k)^j y = \\ &= \sum_{j=0}^n (a_j / \| p_k \|^{-n}) ((D / \| p_k \|) - (p'_k / \| p_k \|))^j y \rightarrow (-1)^n a_n p'_0 y \end{aligned}$$

q.e.d. $\diamond$

5.2.5 Korollar:

Sei N_i die Ordnung von L_i und gelte

$\lim p_{ik} = p_{i0}$, $1 \leq i \leq s$ und

$\lim \| p_{ik} \| = \infty$, $\lim p_{ik} / \| p_{ik} \| = p_{i0}$, $s < i \leq n$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{i=s+1}^n \| p_{ik} \|^{-N_i} \right) L_n(D+p'_{nk}) \dots L_1(D+p'_{1k}) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\prod_{i=s+1}^n (p'_{i0})^{N_i} \right) L_s(D+p'_{s0}) \dots L_1(D+p'_{10}) . \end{aligned}$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus 5.2.4 Lemma.

q.e.d. $\diamond$

Lemma 5.2.4 wird nun ausgenutzt um zu zeigen, daß bei allgemeinen Exponentialsummen die Terme mit nichtbeschränkten Exponenten gegen die Nullfunktion konvergieren. Sie spielen daher für die Gewinnung der Greenfunktionen keine Rolle.

Zur Vorbereitung dient:

5.2.6 Lemma:

Seien $L_1, \dots, L_n$ Differentialoperatoren mit Höchstkoeffizient 1, wobei $\text{ord}(L_j) = N_j$ gelte. Seien $\{p_{ik}\} \subset F$, $1 \leq i \leq n$ Folgen, die den Voraussetzungen von Korollar 5.2.5 erfüllen;

$\sum_{i=s+1}^n (-1)^i (p'_{i0})^{N_i}$ habe nur endlich viele Nullstellen in I .

Sei $L_{Ek} y := L_s(D-p'_{sk}) \circ \dots \circ L_1(D-p'_{1k}) y$ und

$L_{Rk} y := M_k L_n(D-p'_{nk}) \circ \dots \circ L_{s+1}(D-p'_{s+1,k}) y$,

wobei $M_k := \sum_{i=s+1}^n \|p_{ik}\|^{-N_i}$.

Dann gilt:

- Ist $\{R_k\}$, $R_k \in \text{Ker}(L_{Rk})$, $k \in \mathbb{N}$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_\infty)$, gegen R_0 e-konvergente Folge, die die Nullstellenbedingung aus Satz 2.2.7 erfüllt, so gilt $P_0 = \theta$.
- Ist $\{E_k\}$, $E_k \in \text{Ker}(L_{Ek})$, $k \in \mathbb{N}$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_\infty)$ gegen E_0 e-konvergente Folge, die die Nullstellenbedingung aus Satz 2.2.7 erfüllt, so gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E_k - E_0\|_\infty = 0$.

Beweis:

a) Nach Lemma 5.2.4 und Satz 4.2.10 gilt $R_0 \in \text{Ker}(L_{R0})$,

d.h.: $R_0 (-1)^{N_n + \dots + N_{s+1}} p_{n0}^{N_n} p_{s+1,0}^{N_{s+1}} = e\text{-}\lim L_{Rk} R_k = \theta$.

b) Der Höchstkoeffizient der Differentialoperatoren ist 1,

so daß die Behauptung sofort aus Satz 4.2.10 ($E_0 \in \text{Ker}(L_{E_0})$) und Korollar 4.3.11 folgt.

q.e.d.



5.2.2 Korollar:

Voraussetzungen wie in Lemma 5.2.6.

Dann gilt:

$\{E_K + R_K\}$ beschränkt ($\|\cdot\|_\infty$) $\Rightarrow \{E_K\}$ und $\{R_K\}$
beschränkt ($\|\cdot\|_\infty$).

Beweis:

Annahme: $\{E_K\}$ nicht beschränkt. Betrachte $\{(\frac{E_K + R_K}{\|E_K\|}, \frac{E_K}{\|E_K\|})\}$ und $\{\frac{R_K}{\|E_K\|}\}$. Diese Folgen sind alle beschränkt, es gilt $\lim (\frac{E_K + R_K}{\|E_K\|}) = \theta$ ($\|\cdot\|_\infty$) und o.z.z.A. darf angenommen werden, daß $\text{e-lim } \frac{R_K}{\|E_K\|} = \theta$ (vgl. 5.2.6) und $\lim \frac{E_K}{\|E_K\|} = E_0$ ($\|\cdot\|_\infty$) (vgl. 5.2.6) (andernfalls betrachte man geeignete Teilfolgen).

Sei $\tilde{E}_K$ wie im Beweis zu Teil a) von Lemma 5.2.6.

Dann gilt:

- i) $\frac{E_K + R_K}{\|E_K\|} \rightarrow \theta$ (glm.), weil $\frac{E_K + R_K}{\|E_K\|} \rightarrow \theta$ (glm.).
- ii) $\frac{R_K}{\|E_K\|} \rightarrow \theta$ (e-lim), weil $\frac{R_K}{\|E_K\|} \rightarrow \theta$ (e-lim).
- iii) $\frac{\tilde{E}_K}{\|E_K\|} \rightarrow \prod_{i=s+1}^n (-1)^i p_{i0}^i \tilde{E}_0 =: \tilde{E}_0$ (glm.).

Wegen i) und ii) gilt dann $\tilde{E}_0 = \theta$, was wegen $\|E_0\|_\infty = 1$ (vgl. Lemma 5.2.6), $p_{i0}^i = 0$, $s+1 \leq i \leq n$ zur Folge hat.

Wegen $\|p_{i0}\| = 1, s+1 \leq i \leq n$ Widerspruch!

q.e.d.



Jetzt soll noch untersucht werden, ob allgemeine Exponentialsummen die Nullstellenbedingung aus Satz 2.2.7 erfüllen.

5.2.3 Bemerkung:

Satz 5.2.2 läßt sich auch etwas allgemeiner formulieren:

Sei F wie in 5.2.1 und $F_1 \subset C^\infty(I)$ Teilraum (vgl. auch Bemerkung 5.1.6). Seien $L'_1, \dots, L'_n$ Differentialoperatoren mit

$$(*) \quad \begin{cases} F_1 \subset \text{Ker}(L'_1) \\ \text{span} \{ L'_{j-1}(D+h'_{j-1}) \circ \dots \circ L'_1(D+h'_1)(g) \mid h_i \in F, g \in F_1 \} \subset \\ \quad \subset \text{Ker}(L'_j) \text{ für } 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dann ist jede Funktion $y(x) = \sum_{j=0}^n g_j \exp(p_j)$, $g_j \in F_1$, $p_j \in F$, $1 \leq j \leq n$ Lösung der Differentialgleichung

$$L'_n(D-p'_n) \circ \dots \circ L'_1(D-p'_1)y = 0.$$

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 5.2.2.

Eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen von Lösungen solcher Differentialgleichungen macht nun der folgende

5.2.9 Satz:

Sei F wie in 5.2.1 und $F_1 := \text{span}(e^{-p}(e^p)^{(n+2)} \mid p \in F)$.

Seien $L'_1, \dots, L'_n$ Differentialoperatoren mit Höchstkoeffizient 1, die bezüglich F und diesem F_1 der Bedingung (*) aus Bemerkung 5.2.3 genügen. Sei noch

$$A := \bigcup_{h_1, \dots, h_n \in F} \text{Ker}(L'_n(D+h'_n) \circ \dots \circ L'_1(D+h'_1))$$

Dann gilt:

$$\bigvee_{N_0 \in \mathbb{N}} \bigwedge_{y \in A} N(y, I) \leq N_0.$$

Beweis:

Indirekt: Sei $\{y_k\} \subset A$ Folge, $y_k = \sum_{j=1}^n g_{jk} \exp(p_{jk})$, $k \in \mathbb{N}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} N(y_k, I) = \infty$.

Für $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq j \leq n$ sei $z_{jk} := L'_j(D-p'_{jk}) \circ \dots \circ L'_1(D-p'_{1k})y_k = \exp(p_{jk})L'_j \exp(p_{j-1k} - p_{jk}) \dots L'_2 \exp(p'_{1k} - p'_{2k})L'_1 y_k \exp(-p'_{1k})$ (vgl. 5.1.3 und Beweis zu 5.2.2).

Wegen $N(y_k, I) = N(x_k \exp(-p_k), I) = \infty$ und 4.3.6 ii) gilt
 $z_{1k} \neq 0$ für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ und folglich existiert
 $z_0 \in \{2, \dots, n\}$ mit $z_{j_0-1k} \neq 0$ und $z_{j_0-1k} \exp(-p_{j_0k}) \in \text{Ker}(U_{j_0})$
 für unendlich viele $k \in \mathbb{N}$ (vgl. Bem. 5.2.10).
 Aus 4.3.6 ii) ergibt sich rekursiv $(1 \leq i \leq j_0-1)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(z_{j_0-1k} \exp(-p_{j_0k}), I) = \lim_{k \rightarrow \infty} N(z_{j_0-1k}, I) = \infty$$

was nach 4.3.6 i) im Widerspruch zu $z_{j_0-1k} \exp(-p_{j_0k}) \in \text{Ker}(U_{j_0})$
 für $k \in \mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}'$ unendlich) steht.

q.e.d.



5.3 Zur Lösung der Grenzdifferentialgleichung

bei allgemeinen Exponentialsummen

Die Gewinnung der Lösungen der Grenzdifferentialgleichungen bei gewöhnlichen Exponentialsummen läßt sich auch folgendermaßen interpretieren:

Sei $\sum_{j=1}^n c_{jk} \exp(t_{jk}x)$ eine konvergente Folge von gewöhnlichen Exponentialsummen mit der zugehörigen Folge von Differentialgleichungen $\{L_k\}$, $L_k y = (D - t_{nk}) \dots (D - t_{1k}) y$, $k \in \mathbb{N}$. Der Einfachheit halber wird vorausgesetzt, daß $\lim_{j \rightarrow \infty} t_{jk} = 0$ für $1 \leq j \leq n$ gilt.

Betrachtet wird die Folge der "charakteristischen Funktionen" $L_k \exp(tx) = (t - t_{nk}) \dots (t - t_{1k}) \exp(tx)$; durch Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ erhält man

$L_0 \exp(tx) = t^n \exp(tx)$, woraus sich wegen der Vielfachheit der Nullstelle in $t=0$ für $0 \leq j \leq n-1$ folgern läßt:

$$0 = \frac{d^s}{dt^s} (t^n e^{tx})_{t=0} = \frac{d^s}{dt^s} (L_0 e^{tx})_{t=0} = L_0 \left(\frac{d^s}{dt^s} e^{tx} \right)_{t=0} = L_0 x^s.$$

Weil $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ einen n -dimensionalen Raum aufspannen, hat man so $\text{Ker}(L_0)$ beschrieben.

Diese Betrachtungsweise soll nun auf allgemeine Exponentialsummen übertragen werden. Ein direkter Zusammenhang mit algebraischen Betrachtungen ergibt sich im Fall $f_j = x^j$, $1 \leq j \leq m$, also $p(T) = t_1 x + \dots + t_m x^m$ (PES, vgl. 5.1.5). Dort sind die "charakteristischen Funktionen" von der Form

$$P_k(T, x) \exp(p(T)) = L_k \exp(p(T)) = \\ = N_k W(\exp(p(T)), \exp(p(T_{1k})), \dots, \exp(p(T_{nk}))) \exp(-p(T_{1k}) - \dots - p(T_{nk})),$$

wobei P_k Polynom in $t_1, \dots, t_m, x$ und N_k ein geeigneter Normierungsfaktor ist. Setzt man voraus, daß $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{jk} = 0$ für $1 \leq j \leq n$, so darf man für die Grenzgleichung

$$P_0(T,x)\exp(p(T)) = L_0\exp(p(T))$$

mit einer "Vielfachheit" der Nullstelle von $P_0(T,x)$ in $T=0$ (für alle x) rechnen.

Diese "Vielfachheit" wird durch eine "algebraische Mannigfaltigkeit" (vgl. W.GRÖBNER[1970]) beschrieben, die sich wiederum durch einen Modul von Differentialoperatoren charakterisieren läßt (W.GRÖBNER[1970], Satz(X), Seite 176). Für solche Differentialoperatoren Q gilt dann wieder

$$0 = Q(P_0(T,x)\exp(p(T)))_{T=0} = L_0(Q(\exp(p(T))))_{T=0}$$

und man hat wie vorher Lösungen von L_0 gefunden.

Allerdings erhält man durch die algebraische Mannigfaltigkeit nicht immer den vollen Lösungsraum von L_0 (vgl. Beispiel 5.3.7).

Die folgenden Betrachtungen sind gleich etwas allgemeiner gehalten, orientieren sich aber stets wieder an den Aussagen aus der algebraischen Geometrie, ohne daß allerdings auf algebraische Einzelheiten näher eingegangen wird (vgl. dazu z.B. W.GRÖBNER[1968],[1970]).

5.3.1 Definition:

- i) Sei $Q \in R[x_1, \dots, x_m]$ ein Polynom in den Variablen $x_1, \dots, x_m$. Dann sei formal

$$Q^\partial := Q(\partial/\partial t_1, \dots, \partial/\partial t_m)$$

Der von Q erzeugte Differentialoperator.
Anwendung von Q^∂ auf Funktionen wie üblich).

- ii) Sei $q(x_1, \dots, x_m) = q_1 x_1 + \dots + q_m x_m$.
Dann bedeute

$$\exp(q^\partial)h(T_0) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (q^\partial)^j h(T_0)$$

(Taylorentwicklung von $h(T_0 + (q_1, \dots, q_m))$ um T_0)

iii) Sei $q_j := q_{1j}x_1 + \dots + q_{mj}x_m$, $1 \leq j \leq n$ und

$$Q := Q(x_1, \dots, x_m) := \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_j) \text{ eine}$$

"Exponentialsumme in den Veränderlichen

$x_1, \dots, x_m$ " (vgl. D.W.KAMMLRE[1974]),

so sei formal

$$Q^\partial := \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_j^\partial) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_{1j} \frac{\partial}{\partial t_1} + \dots + q_{mj} \frac{\partial}{\partial t_m})$$

iv) Sei formal $D_i := \partial / (\partial / \partial t_i)$ für $1 \leq i \leq m$ und

entsprechend seien Produkte $D_1^{s_1} \dots D_m^{s_m}$ erklärt,

wobei $D_i^0 := 1 (=id)$.

Dann sei für Q aus i) oder iii)

$$D_1^{s_1} \dots D_m^{s_m} Q^\partial := \left(\frac{\partial^{s_1 + \dots + s_m}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} Q(x_1, \dots, x_m) \right)^\partial.$$

5.3.2 Definition:

Sei $M_{n,m} := \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{q_j x} \mid \alpha_j \in \mathbb{R}, q_j \in \mathbb{R}^m, 1 \leq j \leq n \right\}$,

wobei für $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{R}^m$ und $x := (x_1, \dots, x_m)$

$$qx = q_1 x_1 + \dots + q_m x_m$$

und $M_{n,m}^\partial := \{ Q^\partial \mid Q \in M_{n,m} \}$.

Ferner seien $f_1, \dots, f_m$ wie in Definition 5.1.5 festgelegt und $D \subset \mathbb{R}^m$ offen mit

$$f_1(I) \times \dots \times f_m(I) \subset D$$

$M_{n,m}$ werde von jetzt ab stets als Teilmenge von $L_\infty(D)$ mit der induzierten Topologie aufgefaßt.

Für eine Folge $\{Q_k\} \subset M_{n,m}$ wird definiert:

i) $\{Q_k^\partial\}$ heißt beschränkt $:= \{Q_k\} \subset M_{n,m}$ beschränkt

- ii) $\{Q_k^\delta\}$ konvergiert gegen $Q_0^\delta \in M_{n,m}^\delta$:
 $\{Q_k\}$ konvergiert gegen $Q_0 \in M_{n,m}$.

5.3.3 Satz 1:

$Q_{n,m}^\delta$ trägt anders ausgedrückt die initiale Topologie bei der Abbildung

$$Q_{n,m}^\delta : Q^\delta \rightarrow Q(x_1, \dots, x_m) \in M_{n,m} \subset L_\infty(D).$$

5.3.4 Lemma:

- i) Mit $\{Q_k\} \subset M_{n,m}$ ist für jede Ableitung auch die Folge ihrer Ableitungen beschränkt. Die entsprechende Eigenschaft gilt auch für $M_{n,m}^\delta$.
- ii) Sei $\{Q_k\} \subset M_{n,m}$ konvergent gegen $Q_0 \in L_\infty(D)$. Dann liegt $Q_0 \in M_{n,m}$.
- iii) Sei $\{Q_k\} \subset M_{n,m}$, $Q_k = \sum_{j=1}^n a_{jk} \exp(q_k x)$ konvergent gegen $Q_0 \in M_{n,m}$ und gilt $\{q_k\} \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt, so konvergiert $\{Q_k\}$ gleichmäßig auf $\bar{D}$ gegen Q_0 .

Beweis:

- i) D.W.KAMMLER[1974], Seite 145 (siehe auch D.W.KAMMLER[1973], Lemma 1, Seite 30).
- ii) D.W.KAMMLER[1974],
- iii) D.W.KAMMLER[1974], Lemma, Seite 146.

◇

5.3.5 Bezeichnung:

Sei $f := (f_1, \dots, f_m)$, $q \in \mathbb{R}^m$, $q = (q_1, \dots, q_m)$

- i) $qf := q_1 f_1 + \dots + q_m f_m$, $q^\delta := q_1 (\partial/\partial t_1) + \dots + q_m (\partial/\partial t_m)$
- ii) Sei $\sum_{j=1}^n a_j \exp(q_j f)$ eine allgemeine Exponentialsumme:

Dann heißt $\sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_j^{\partial}) \in M_{n,m}^{\partial}$ der zur gegebenen Exponentialsumme gehörige Differentialoperator, und umgekehrt. Dabei gilt:

$$(\sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_j^{\partial})) \exp(Tf)_{T=0} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(q_j^{\partial})$$

(vgl. 5.3.1).

5.3.6 Korollar:

Sei $(\sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \exp(q_{jk}^{\partial}))$ eine gegen $Q_0^{\partial} \in M_{n,m}^{\partial}$ konvergente Folge, wobei für alle $(\alpha_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt sei.

Dann konvergiert die zugehörige Exponentialsummenfolge gleichmäßig auf I gegen die zu Q_0^{∂} gehörige Exponentialsumme.

$$\text{D.h.: } Q_k^{\partial} \rightarrow Q_0^{\partial} \Rightarrow Q_k^{\partial}(\exp(Tf))_{T=0} \rightarrow Q_0^{\partial}(\exp(Tf))_{T=0}$$

Beweis:

Folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(\sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \exp(q_{jk}^{\partial}))$ gegen Q_0^{∂} (Lemma 5.3.4) auf $\overline{D}$ und

Definition 5.3.2 wegen $f_1(I)x \dots x f_m(I) \in D$.

q.e.d.



Kann man nun jeder beschränkten Folge von allgemeinen Exponentialsummen eine beschränkte zugehörige Folge von Operatoren aus $M_{n,m}^{\partial}$ zuordnen, so können die Ergebnisse von D.W. KAMMLER [1974] angewendet werden, und eine vollständige Beschreibung der Lösungsmenge der Grenzdifferentialgleichung wird möglich. Dies ist aber nicht immer zu verwirklichen, was sich im folgenden Beispiel zeigt:

5.3.7 Beispiel:

$$\text{Sei } y_k(x) := (k^3/7) \exp\left(\frac{x}{k} - \frac{x^2}{2k}\right) - (k^3/14) \exp\left(\frac{2x}{k} - \frac{2x^2}{k}\right) - (k^3/14), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Man zeigt leicht (etwa durch Taylorentwicklung),
 daß $\lim y_k = x^3$ (gleichmäßig auf jedem kompakten
 Intervall), also insbesondere $\{y_k\} \in \mathcal{O}(I)$ beschränkt.
 Andererseits gilt:

$$y_k(x) = \left[(k^3/7) \sum_{s=1}^3 \frac{1}{s!} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{1}{2k^2} \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^s - \right. \\
\left. - (k^3/14) \sum_{s=1}^3 \frac{1}{s!} \left(\frac{2}{k} \frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{2}{k^2} \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^s + \right. \\
\left. + k^{-1} R^{\partial} \right] (\exp(t_1 x + t_2 x^2))|_{T=0}$$

und der zugeordnete Operator hat die Gestalt:

$$\frac{k}{14} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{k}{14} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{3}{14} \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{1}{14} \frac{\partial^3}{\partial t_1^3} + \frac{1}{k} R_{*}^{\partial}.$$

dabei ist R_{*}^{∂} beschränkt (trivial), aber offensichtlich

$$\frac{k}{14} \frac{\partial}{\partial t_2} - \frac{k}{14} \frac{\partial^2}{\partial t_1^2}$$

nicht beschränkt.

◇

Mit Mitteln der algebraischen Geometrie würde man bei diesem
 Beispiel erhalten: (für die einzelnen Begriffe vgl. W. GRÖBNER
 [1970])

Grenzdifferentialgleichung: $Ly = xy''' - y''$ mit

Fundamentalsystem (I mit $\mathcal{O}(I)$): $1, x, x^3$

Charakteristische Gleichung: $L(\exp(t_1 x + t_2 x^2)) =$

$$= \exp(t_1 x + t_2 x^2) [8t_2^3 x^4 + 12t_1 t_2^2 x^3 + (6t_1^2 t_2 - 4t_2^2) x^2 + \\
+ (t_1^3 + 12t_2^2 - 4t_1 t_2) x + (6t_1 t_2 - t_1^2 - 2t_2)].$$

zugehöriges Primärideal: $(g_0, \dots, g_4)$, wobei $g_j(t_1, t_2)$ der
 Koeffizient von x^j , $0 \leq j \leq 4$.

Exponent ρ : $\rho = 3$

algebraische Mannigfaltigkeit: $\text{span} \left\{ \text{Id}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_2} \right\} = 12$
 aber $\dim(\Delta X(\exp(t_1 x + t_2 x^2))_{T=0}) =$
 $= \dim \text{span}\{1, x, 0\} = 2$.

Man kann also i.a. nicht den vollen Lösungsraum mit der zur charakteristischen Funktion gehörigen algebraischen Mannigfaltigkeit beschreiben. Die Ursache dafür liegt im Auftreten von Nulloperatoren im Modul der die algebraische Mannigfaltigkeit beschreibenden Differentialoperatoren (siehe oben; W. GRÜNER, Satz (X), Seite 176). Der folgende Abschnitt ist daher etwas allgemeiner gehalten, um solche Fälle mit einzuschließen.

Die weiteren Untersuchungen beschäftigen sich mit der Lösung der Bruchdifferentialgleichungen bei allgemeinen Exponentialformen in dem Fall, daß alle Parameter in den Exponenten gegen Null konvergieren. Die anderen Fälle lassen sich praktisch immer wegen Bedingungen für die lineare Unabhängigkeit auf diesen Fall zurückführen (Fall $\|T\| \rightarrow \infty$ wie in §5.2).

Sei wieder $p(T) := t_1 f_1 + \dots + t_m f_m$ und

$$p_j = p(T_j) = t_{j1} f_1 + \dots + t_{jm} f_m \quad \text{für } T, T_j \in \mathbb{R}^m.$$

Ferner seien Folgen $\{T_j^k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ so gegeben, daß $T_j^k = 0, k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} T_j^k = 0$ für $2 \leq j \leq n$.

Sei $\{L_k\}$ eine Folge von Differentialoperatoren mit $\exp(p_{jk}) = \exp(p(T_j^k)) \in \text{Ker}(L_k)$, $1 \leq j \leq n$, $k \in \mathbb{N}$; gelte $L_k \rightarrow L_0$ für $k \rightarrow \infty$.

Sei $P_k(T, x) e^{p(T)} := L_k e^{p(T)}$, $k \in \mathbb{N}$; es gilt trivialerweise

$$P_k(T, x) e^{p(T)} = L_k e^{p(T)} \rightarrow L_0 e^{p(T)} =: P_0(T, x) e^{p(T)}.$$

P_k bzw. P_0 heißen charakteristische Funktionen von L_k bzw. L_0 .

5.3.8 Definition:

$$i) \quad M^{\partial} := \left\{ \left(a_{1k} + \sum_{j=2}^n a_{jk} \exp(p_{jk}) \right)_{k \in \mathbb{N}} \mid a_{jk} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq n, k \in \mathbb{N} \right\},$$

dabei sind $T_1^K = 6$ und T_j^K für $2 \leq j \leq n$ wie oben festgelegt.

$$\text{ii) } \text{AM}(P_0, \theta) := \{ Q_0^\partial \in M_{n,m}^\partial \mid Q_0^\partial \text{ ist Grenzüperator eines Elements aus } M^\partial \}$$

"Algebraische Mannigfaltigkeit von P_0 in θ "

$$\text{iii) } N(P_0, \theta) := \{ Q^\partial \mid Q^\partial \in \text{AM}(P_0, \theta) \text{ und } Q^\partial e^{P(T)}_{T=\theta} = 0 \}$$

"Nulloperatoren von $\text{AM}(P_0, \theta)$ "

5.3.9 Bemerkung:

i) $\text{AM}(P_0, \theta) \neq \emptyset$, da $\text{Id} \in \text{AM}(P_0, \theta)$.

ii) $\text{AM}(P_0, \theta)$ enthält nur (Differential-) Polynome (vgl. D.W.KAMMLER[1974]).

iii) $\text{AM}(P_0, \theta)$ enthält mit jedem Element auch alle seine Ableitungen.

(folgt aus D.W.KAMMLER[1974], Lemma, Seite 145 ; vgl. auch Lemma 5.3.4 i) und iii).)

iv) $N(P_0, \theta)$ kann auch nichttriviale Elemente enthalten (Beispiel 5.3.7).

Die Bezeichnung "Algebraische Mannigfaltigkeit" wurde wegen der Eigenschaft iii) gewählt, die nach W.GRÖßNER auch dem Modul von Differentialoperatoren zukommt, der die (gewöhnliche) algebraische Mannigfaltigkeit charakterisiert (vgl. W.GRÖßNER[1970], Seite 176, 177, Satz (X) und c), d), e)). Daß die Begriffe im Fall der Polynomexponentialsummen übereinstimmen ist plausibel, soll hier aber nicht bewiesen werden.

5.3.10 Bemerkung:

$Q^\partial \in \text{AM}(P_0, \theta) \sim Q^\partial e^{P(T)}_{T=\theta}$ Lösung von L_0 , denn

$Q^\partial (P_0(T, x) e^{P(T)})_{T=\theta} = 0$ (wegen iii)) und daher

$$\begin{aligned} 0 &= Q^\partial (P_0(T, x) e^{P(T)})_{T=\theta} = (Q^\partial L_0 e^{P(T)})_{T=\theta} = (L_0 Q^\partial e^{P(T)})_{T=\theta} = \\ &= L_0 (Q^\partial e^{P(T)})_{T=\theta} \end{aligned}$$

5.3.11 Definition:

- i) (Erweiterung von M^{∂})
 $\Phi := \{ (Q_k^{\partial} + N_k^{\partial})_{k \in \mathbb{N}} \mid (Q_k^{\partial}) \in M^{\partial}, (N_k^{\partial}) \subset N(P_0, \theta), (Q_k^{\partial} + N_k^{\partial}) \text{ beschränkt} \}.$
- ii) $D(P_0, \theta) := \{ \text{Grenzwerten von Folgen aus } \Phi \}$
- iii) Eine Ableitung $A = \partial_1^{\partial} \dots \partial_m^{\partial}$ heißt folgenzulässig für $Q_0^{\partial} \in D(P_0, \theta)$:
 Es gibt Folge $\{R_k^{\partial}\} \in \Phi$ mit $\lim R_k^{\partial} = Q_0^{\partial}$ und $\{AR_k^{\partial}\} \in \Phi$.
- iv) Eine Ableitung A heißt zulässig für $Q_0^{\partial} \in D(P_0, \theta)$:
 $A(N(P_0, \theta)) \subset N(P_0, \theta) \cup \{c \cdot \text{id} \mid c \in \mathbb{R}\}.$

Beispiel für eine konvergente Folge aus Φ , die nicht schon in M^{∂} liegt ist die Folge aus 5.3.7.

5.3.12 Lemma (Charakterisierung der Elemente aus $D(P_0, \theta)$):

- i) Jede für $Q_0^{\partial} \in D(P_0, \theta)$ zulässige Ableitung ist auch folgenzulässig.
- ii) $D(P_0, \theta)$ enthält mit jedem Operator auch alle seine folgenzulässigen (und damit nach i) auch alle zulässigen) Ableitungen.

Beweis:

i) Sei $Q_0^{\partial} \in D(P_0, \theta)$ und A zulässig für Q_0^{∂} . Es gibt eine Folge $\{Q_k^{\partial} + N_k^{\partial}\} \in \Phi$ mit $\lim (Q_k^{\partial} + N_k^{\partial}) = Q_0^{\partial}$; es folgt $AQ_0^{\partial} = \lim (AQ_k^{\partial} + AN_k^{\partial})$, denn $Q_k^{\partial} + N_k^{\partial}$ kann als Element von M_{n_1, m_1}^{∂} (n_1, m_1 genügend groß) aufgefaßt werden und nach 5.3.4 i) und iii) folgt die Gleichheit. Es gilt $\{AQ_k^{\partial}\} \in M^{\partial}$ und wegen der Zulässigkeit von A : $AN_k^{\partial} \in N(P_0, \theta) \cup \{c \cdot \text{id} \mid c \in \mathbb{R}\}$, so daß für eine Teilfolge entweder $AN_k^{\partial} \in N(P_0, \theta)$ und damit $\{AQ_k^{\partial} + AN_k^{\partial}\} \in \Phi$ oder sogar $AN_k^{\partial} = c_k \cdot \text{id}$ und damit $\{AQ_k^{\partial} + AN_k^{\partial}\} \in M^{\partial}$ und beschränkt. q.e.d.

als $Q_0^d \in D(P_0, \theta)$ und λ folgenmäßig für Q_0^d . Es gibt also $\lambda_K^d \in \mathbb{R}^d$ mit $\lambda_K^d \in Q_0^d$ und $(\lambda_K^d) \in \mathbb{R}^d$. Nach Lemma 5.1.4 folgt $\lambda_K^d \in D(P_0, \theta)$.

q.e.d.

◊

Es ist mit für $D(P_0, \theta)$ eine ähnliche Charakterisierung wie für $AM(P_0, \theta)$ erhalten.

Es ist nun noch die Frage, ob man mit $D(P_0, \theta)$ den vollen Lösungsraum der Grenzdifferentialgleichung L_0 beschreiben kann. Unsere Untersuchungen in diese Richtung würden aber im allgemeinen Fall sehr aufwendig sein und sollen hier unterbleiben. Wie sie für konkrete Probleme durchgeführt werden können, erkennt man im Beispiel des §6.1. Es soll aber doch wenigstens ein Lösungsweg für den allgemeinen Fall angegeben werden.

Die Frage, ob man mit $D(P_0, \theta)$ den vollen Lösungsraum von L_0 beschreiben kann, ist zunächst einfach die Frage nach der Dimension von $\text{span} \{Q_0^d e^{p(T)} \mid T=0 \mid Q_0^d \in D(P_0, \theta)\}$. Diese kann man natürlich aus der Dimension von $D(P_0, \theta)$ berechnen, wenn man die Nulloperatoren aus $AM(P_0, \theta)$ kennt. Die Berechnung der Dimension von $D(P_0, \theta)$ sollte mit den von L.W. KATZNER [1974] bei der Approximation mit Exponentialsummen in mehreren Veränderlichen verwendeten Methoden möglich sein. Dazu ist allerdings noch die Kenntnis der algebraischen Mannigfaltigkeiten von vorgegebener Ordnung in genügend expliziter Form nötig. Die darin auftretenden Operatoren scheinen formal einen starken Zusammenhang mit der Formel 5.1.2 zu besitzen (dies wurde bis $n=5$ nachgerechnet). Hat man genügend gute Einschließungen für $\dim(D(P_0, \theta))$ gefunden (benötigt werden nur Schranken nach unten), so läßt sich durch die Voraussetzung, daß es nur "wenige" Nulloperatoren gibt (im konkreten Fall leicht an $e^{p(T)}$ nachprüfbar) die aufgeworfene Frage positiv beantworten.

Bemerkung: Diese Betrachtungsweise läßt sich auch auf Funktionen der Form $F(T, x)$, $T \in \mathbb{R}^m$, die analytisch in T sind

bertragen, sofern man einen dem Korollar 5.3.6 entsprechenden Konvergenzsatz beweist.

Im Zusammenhang mit dieser Beweisskizze sei aber noch einmal auf die grundsätzliche Möglichkeit hingewiesen, Charakterisierungen von "optimalen Differentialgleichungen" zu erhalten (vgl. §4.4).

5. Anwendung der Ergebnisse auf praktische Beispiele

6.1 Ein theoretisches Beispiel

6.1.1 Approximation mit Polynom-Exponentialsummen und rationalen Polynom-Exponentialsummen

Im Mittelpunkt dieses Paragraphen steht die im Abschnitt 4.1 gegebene Anwendung der bereitgestellten Sätze auf die Approximationsaufgaben aus Beispiel 3.2. Der Fundamentalsatz 6.2.5 (Existenzsatz für Polynom-Exponentialsummen im $(C(I), || \cdot ||_\infty)$ beziehungsweise $(L_p(I), || \cdot ||_p)$, $1 \leq p < \infty$) umfaßt die entsprechende Existenzaussage von M.BESTERCHN [1973] für $(C(I), || \cdot ||_\infty)$ und die Existenzaussagen für die generalisierte Exponentialsummenapproximation von H.WERNER [1969] für $(C(I), || \cdot ||_\infty)$ und von D.W.KÄMLER [1973] für $(C(I), || \cdot ||_\infty)$ und $(L_p(I), || \cdot ||_p)$, $1 \leq p < \infty$. Der Existenzsatz 6.2.8 macht entsprechende Approximationsaussagen für die Approximation mit rationalen Polynom-Exponentialsummen.

Während sich die Methoden aus den oben zitierten Arbeiten von M.BESTERCHN und D.W.KÄMLER stark an der speziellen Gestalt der Approximationsfamilien orientieren, bieten die in den vorangegangenen Paragraphen zusammengestellten Aussagen eine breitere Anwendungsmöglichkeit. Zur Erläuterung der für konkrete Fälle notwendigen Überlegungen wird die Methode im Abschnitt 6.1 an Hand eines theoretischen Beispiels diskutiert.

6.1 Ein theoretisches Beispiel

Betrachtet wird die Approximation mit Funktionen aus der Menge

$$A := \left\{ \sum_{j=1}^3 \alpha_j \exp(t_{j1} \sin(x) + t_{j2} \cos(x)) \mid \alpha_j, t_{j1}, t_{j2} \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq 3 \right\}$$

an Funktionen aus $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ oder $(L_p(I), \|\cdot\|_p)$,
 wobei I ein kompaktes Intervall mit nicht
 leerem Inneren F ist hier gegeben durch $F = \text{span}\{e^{ix}, e^{-ix}\}$

6.1.1 Bemerkung:

F ist nicht abgeschlossen ($1 \notin F$) und daher nicht präkompakt.

Beispiel: $y_k(x) = k e^{k^{-1} \sin(x)} - k$, $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt: $y_k \in A$ ($k \in \mathbb{N}$), $\{y_k\}$ beschränkt und

$\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_k - \sin\|_p = 0$ für $1 \leq p < \infty$ (Beweis etwa durch Entwicklung
 der Exponentialreihe),

aber $\sin \notin A$.

6.1.2 Lemma:

A ist prä-e-folgenkompakt.

Beweis:

Nachzuprüfen sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.7. Weil
 $A \subset C^\infty(I)$ muß nur die Nullstellenbedingung nachgewiesen werden.
 Dazu: Anwendung von Satz 5.2.9 (Man braucht nicht die expli-
 zite Gestalt der Differentialoperatoren L_1, L_2 und L_3 ,
 sondern nur ihre Existenz, wobei wichtig ist, daß der Höchstk-
 oeffizient stets 1 ist). Mit Formel 5.1.2 erhält man:

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{\sigma=0}^5 \sum_{\lambda=0}^{5-\sigma} ((-1)^\lambda / \lambda! \sigma!) p^\lambda (p^\sigma)^{(5)} \mid p \in F \right\} \subset \\ &\subset \text{span}_{\mathbb{R}} \{ \cos^u \sin^v \mid 0 \leq u+v \leq 5 \} \subset \\ &\subset \text{span}_{\mathbb{C}} \{ e^{i5x}, e^{-i5x}, \dots, e^{ix}, e^{-ix}, 1 \}. \end{aligned}$$

Für $L_1 := (D^2+25)(D^2+16)(D^2+9)(D^2+4)(D^2+1)D$ gilt also
 $F_1 \subset \text{Ker}(L_1)$.

Entsprechend überlegt man sich leicht, daß auch L_2 und L_3
 mit der Bedingung (*) aus 5.2.3 als Differentialoperatoren
 mit konstanten Koeffizienten gewählt werden können (sie
 haben also insbesondere Höchstkoeffizient 1). Nach Satz

5.2.9 erfüllt A also die Nullstellenbedingung aus Satz 2.2.10.

q.e.d.



5.2.3 Bemerkung:

Die hier angegebenen Bedingungen führen auch zur Existenz von n linear unabhängigen Lösungen L_1, L_2 und L_3 mit Höchstkoeffizienten (d.h. L_j haben mit konstanten Koeffizienten), so daß stets gilt:

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j \exp(p_j) \in \text{Ker}(L_3(D-p_3') \circ L_2(D-p_2') \circ L_1(D-p_1'))$$

(vgl. Satz 5.2.2)

5.2.4 Korollar:

Zur Gewinnung einer proximalen Erweiterung von A muß man nur Folgen aus A mit beschränkten Exponenten betrachten. Die gemäß 6.1.2 existierenden e-Häufungspunkte beschränkter Folgen aus A sind Lösungen der Grenzdifferentialgleichungen.

Beweis:

Lemma 5.2.6 mit Korollar 5.2.7 ;

Satz 5.2.10 mit Bemerkung nach Satz 5.2.2

q.e.d.



6.1.5 Bemerkung:

Im allgemeinen kommt man nicht mit der durch die Wronski-Determinante gebildeten Differentialgleichung aus:

Beispiel: $W(y, 1, e^{\alpha \sin(x)}, e^{\beta \sin(x)}) e^{-(\alpha+\beta)\sin(x)} (\alpha\beta(\beta-\alpha))^{-1} =$

$$= y''' \cos^3(x) - y''((\alpha+\beta)\cos^2(x) - 3\sin(x))\cos^2(x) +$$

$$+ y'(2\alpha\cos^4(x) + \cos^2(x) + 3\sin^2(x) - (\alpha+\beta)\cos^2(x)\sin(x))\cos(x)$$

Hier ist die Voraussetzung von Satz 5.2.10 ("gewöhnlich") i.a. nicht erfüllt, da nichtkürzbare Nullstellen im Höchstkoeffizienten auftreten.

Um Korollar 6.1.4 anwenden zu können, muß man also wirklich

zu Differentialgleichungen von höherer Ordnung als 3 übergehen.

6.1.6 Bemerkung:

Seien $y_1 = \exp(p_1), \exp(p_2), \exp(p_3)$, $p_j \in \mathbb{P}$ linear unabhängig und $W = W(\exp(p_1), \exp(p_2), \exp(p_3))$ (Wronskideterminante) nur endlich viele Nullstellen in $\mathbb{I}$.

Lemma: $W(\exp(p_1), \exp(p_2), \exp(p_3)) \exp(-p_1 - p_2 - p_3)$ ist dann stets trigonometrisches Polynom $\neq 0$ (vgl. dazu auch Formel 5.1.11).

Damit läßt sich die Lösungsmethode von Abschnitt 5.3 stückweise auf die durch die Wronskideterminante erzeugte Differentialgleichung anwenden, und nach 6.1.4 erhält man so die Lösungen auf ganz $\mathbb{I}$.

Betrachtet werden nur Folgen $\{y_k\} \subset A$ der Form

$y_k(x) = a_{1k} + a_{2k} \exp(p_{2k}) + a_{3k} \exp(p_{3k})$, wobei $p_{2k}, p_{3k} \neq 0$.

(Die anderen Fälle - weniger als drei im Grenzübergang zusammenfallende Exponenten - lassen sich einfach schon mit dem Mittelwertsatz behandeln).

6.1.7 Bemerkung:

Wie man einfach nachrechnet, sind die Nulloperatoren bis Höchstgrad 2 gegeben durch

$$\text{span} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - 1 \right\}.$$

6.1.8 Bezeichnung:

Ein Vektorraum AM von Differentialpolynomen wird als "algebraische Mannigfaltigkeit" bezeichnet, wenn mit $Q \in AM$ auch alle Ableitungen von Q wieder zu AM gehören (vgl. 5.3.9 iii)).

6.1.9 Lemma:

Eine algebraische Mannigfaltigkeit von Differentialpolynomen mit

$$\dim AM := \dim \operatorname{span} \{ Q^{\partial} e^{p(T)} \big|_{T=0} \mid Q^{\partial} \in AM \} \leq 3 ,$$

$$p(T) := t_1 \sin + t_2 \cos$$

ist stets gegeben durch

$$(1) \quad AM = \operatorname{span} \{ a Q_1^{\partial^2} + Q_2^{\partial}, Q_1^{\partial}, 1 \} , \text{ wobei } a \in \{0,1\} \text{ und } Q_1, Q_2 \text{ homogene Polynome vom Grad } 1 ,$$

oder

$$(2) \quad AM = \operatorname{span} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} - 1, \frac{\partial}{\partial t_1}, \frac{\partial}{\partial t_2}, 1 \right\} .$$

Beweis:

Jede Menge AM der Form (1) oder (2) enthält mit jedem Operator Q^{∂} auch alle seine abgeleiteten Operatoren und ist daher algebraische Mannigfaltigkeit.

Im Fall (1) ist $\dim AM \leq 3$ trivialerweise erfüllt; im Fall (2) wirkt sich der Nulloperator $(\partial^2/\partial t_1^2) + (\partial^2/\partial t_2^2) - 1$ nicht auf die Dimension aus.

Jede algebraische Mannigfaltigkeit AM mit $\dim AM \leq 3$, die keinen Nulloperator $\neq 0$ enthält, kann nur Differentialpolynome vom Höchstgrad 2 enthalten (sonst wird $\dim AM$ zu groß). Bei Polynomhöchstgrad 1 erhält man für AM die Form (1) mit $a=0$. AM enthalte nun einen Operator Q^{∂} vom Grad 2. In der Bezeichnung $X := \partial/\partial t_1$, $Y := \partial/\partial t_2$ und $Q := Q(x,y) = Q^{\partial}$ gilt $Q, Q_x, Q_y, 1 \in AM$, wobei nach Aufspalten von Q in die homogenen Bestandteile $Q = Z + E + a$, Z, E homogene Polynome vom Grad zwei bzw. eins, $a \in \mathbb{R}$, folgt:

$Q, Z_x, Z_y, 1 \in AM$. Die Betrachtung wird auf den Fall $Z_y = e Z_x \neq 0$ eingeschränkt (sonst analog). Es gilt:

$$Z = \frac{1}{2}(x Z_x + y Z_y) = \frac{1}{2}(x + \beta y) Z_x \quad (\text{Eulersche Identität, z.B.}$$

W.GRÖBNER[1968], Seite 77), also

$$Z_x = \frac{1}{2}(x+iy)Z_{xx} + \frac{1}{2}Z_x \quad \text{und daher} \quad Z_x = (x+iy)Z_{xx}.$$

$$\text{folglich} \quad Z = \frac{1}{2}(x+iy)^2 Z_{xx} \quad \text{und wegen} \quad \text{grad } Z = 2 \quad \text{ist} \quad Z_{xx} = 0.$$

Wegen $\dim AM \leq 3$ gibt es (bis auf nullen Nulloperator) keine weiteren Operatoren vom Grad 2 in AM , so daß die Form (1) mit $a=1$ nachgewiesen ist.

Zu begründen bleibt noch, daß (2) die einzige algebraische Mannigfaltigkeit mit $\dim AM \leq 3$ ist, die Nulloperator enthält. Nach Bemerkung 3.1.7 ist die Form (2) die einzige algebraische Mannigfaltigkeit, wenn der Höchstgrad der Polynome in AM zwei ist.

Beh.: Sei $x := \partial/\partial t_1$, $y := \partial/\partial t_2$ und $N := x^2 + y^2 - 1$.

Die allgemeinste Form eines Nulloperators vom Grad 3 ist gegeben durch

$$(a_1 x + a_2 y + d)N, \quad \text{wobei} \quad a_1 \neq 0 \quad \text{oder} \quad a_2 \neq 0.$$

Bew.:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } q(x,y) := & a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + \\ & + b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2 + \\ & + c_1 x + c_2 y + d. \end{aligned}$$

$$\text{Es gilt} \quad q(x,y)e^{p(T)} \Big|_{T=0} = q(\sin, \cos) =: q^*(\varphi)$$

Ist $q(x,y)$ Nulloperator, so ist $q^*(\varphi) = 0$ auf R .

$$\text{Aus den Gleichungen: } q^*(0) = q^*(\pi) = 0, \quad q^*\left(\frac{\pi}{2}\right) = q^*\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{erhält man} \quad b_3 + d = 0, \quad a_4 + c_2 = 0, \quad b_1 + d = 0 \quad \text{und} \quad a_1 + c_1 = 0$$

$$\text{und damit} \quad q^*(\varphi) = \sin(\varphi)\cos(\varphi)((a_2 - a_4)\sin(\varphi) + (a_3 - a_1)\cos(\varphi) + b_2)$$

$$\text{und es folgt} \quad a_4 = a_2, \quad a_3 = a_1, \quad b_2 = 0 \quad \text{und damit}$$

$$q(x,y) = a_1 x(x^2 + y^2 - 1) + a_2 y(x^2 + y^2 - 1) - d(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{q.e.d.}$$

Annahme: Es gibt $Q \in AM$, $\text{Grad } Q = 3$.

Wegen $\dim AM \leq 3$ folgert man leicht, daß Q Nulloperator sein muß, also $Q = (a_1 x + a_2 y + d)(x^2 + y^2 - 1)$.

Die Ableitungen von Q spannen eine algebraische Mannigfaltigkeit auf, deren Dimension höchstens 3 sein kann. Man erkennt sofort, daß diese Mannigfaltigkeit nicht vom Typ (2) sein kann (betrachte Q_x oder Q_y), und es bleibt zu zeigen, daß sie auch nicht vom Typ (1) ist:

Annahme: Form (1) liegt vor.

$$Q_x = 3a_1x^2 + 2a_1xy + a_1y^2 + 2dx - a_1$$

$$Q_y = a_2x^2 + 2a_1xy + 3a_2y^2 + 2dy - a_2$$

Sei o.E.d.A. $a_1=1$. Q_x und Q_y sind dann von der Form

$$Q_x = aS_1^2 + aS_2 + bS_1 + c, \quad Q_y = a'S_1^2 + a'S_2 + b'S_1 + c', \quad \text{wobei gelten}$$

muß:

$$(i) \quad 3x^2 + 2a_2xy + y^2 = aS_1^2$$

$$(ii) \quad a_2x^2 + 2xy + 3a_2y^2 = a'S_1^2$$

$$(i) \Rightarrow a_2 \in (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

Widerspruch.

$$(ii) \Rightarrow \frac{1}{a_2} \in (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$$

q.e.d.



6.1.10 Bemerkung:

Der vorangegangene Beweis verdeutlicht, daß die Schwierigkeiten bei allgemeinen Untersuchungen der Mannigfaltigkeiten hauptsächlich von der Vielzahl der notwendigen Fallunterscheidungen herrühren. In diesem Zusammenhang sei an die Beweisskizze am Ende des Abschnitts §5.3 erinnert.

6.1.11 Korollar:

Die durch algebraische Mannigfaltigkeiten beschreibbaren Grenzfunktionen von Folgen $\{y_k\}$ der Form

$$(*) \quad y_k(x) = a_{1k} + a_{2k} \exp(p_{2k}) + a_{3k} \exp(p_{3k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

$$p_{2k}, p_{3k} \rightarrow 0$$

sind von der Gestalt:

$$y_0(x) = (ap_1^2 + p_2)b + cp_1 + d,$$

wobei $a \in \{0,1\}$, $b, c, d \in \mathbb{R}$, $p_1, p_2 \in \text{span}\{\sin, \cos\}$.

Beweis:

Lemma 6.1.9, wobei die von Null verschiedenen Grenzfunktionen bei Typ (2) für $a=0$ schon vom Typ (1) abgedeckt werden.

q.e.d.



Es wird sich im folgenden herausstellen, daß man damit schon alle Grenzfunktionen beschrieben hat. Dazu macht man sich leicht klar, daß dies bestimmt dann gilt, wenn die Grenzfunktionen nur Linearkombinationen von Potenzprodukten der Sinus- und Cosinusfunktion - also durch Differentialpolynome beschreibbar - sind (vgl. dazu Definition von Φ in 5.3.11 i) und $D(P_0, \Theta)$ in 5.3.11 ii)).

6.1.12 Bemerkung:

Sei $L_1 := D$, $L_2 := D^2 + 1$, $L_3 := (D^2 + 9)(D^2 + 4)(D^2 + 1)D$ ($D = \frac{d}{dx}$)

Dann ist y_k wie in (*) von 6.1.11 Lösung von

$$L_3(D - p'_{3k}) \circ L_2(D - p'_{2k}) \circ L_1 y = 0.$$

Die Differentialgleichung $L_3 \circ L_2 \circ L_1 y = 0$ hat aber außer Potenzprodukten von $\sin$ und $\cos$ auch die Funktionen $x, x \sin(x), x \cos(x)$ zur Lösung.

Beweis:

y_k ist Lösung: vgl. Bemerkung 6.1.3 und Satz 5.2.2.

Daß $x, x \sin(x), x \cos(x)$ Lösung von $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ ergibt sich daraus, daß $0, i, -i$ doppelte Nullstellen der charakteristischen Funktion von $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ sind.

q.e.d.



Es soll nun gezeigt werden, daß die eben genannten Funktionen nicht als Grenzfunktionen in Betracht kommen. Die Vorgehensweise liefert Ansatzpunkte für Untersuchungen in allgemeineren Fällen.

6.1.13 Bemerkung:

Sei $\{y_k\}$ Folge der Form (*) aus 6.1.11 mit $\lim y_k = y_0$ ($\|\cdot\|_\infty$) und $L_2 \circ L_1 y_0 \neq 0$.

Dann gilt:

$$i) \lim L_2(D - p'_{2k}) \circ L_1(D - p'_{1k}) y_k = L_2 \circ L_1 y_0 \quad (\|\cdot\|_\infty)$$

$$(4) \quad (L_2 \circ L_1) \circ (L_2 \circ L_1) y_0 \neq 0.$$

Beweis:

i) trivial (vgl. Bemerkung nach Satz 5.2.2)

$$ii) \quad \text{Sei } a_k = p_k^{-1} q_k = p_k^{-1} p_k \cdot p_k = p_k, \quad p_k = p_0 \cdot \|a_k\|^{-1}.$$

Es darf o.E.d.A. angenommen werden, daß

$$\lim \|p_k\|^{-1} p_k =: p_0 \quad \text{und} \quad \lim \|a_k\|^{-1} p_k =: q_0 \quad (\| \cdot \|_\infty)$$

(gilt stets für geeignete Teilfolge).

Mit Lemma 5.1.3 ii) gilt:

$$\begin{aligned} L_2(D-p'_{2k}) \circ L_1(D-p'_{1k}) y_k &= L_2(D-p'_{2k}) (a_{3k} \exp(p_{2k})) = \\ &= a_k L_2(D-p'_{2k}) ((p'_k \exp(q_k)) \exp(p_{2k})) = \\ &= a_k \exp(p_k) (p'_k + p''_k + 2p'_k q'_k + p'_k (q_k^2 + q''_k)) = \\ &= a_k n_k^{-1} \exp(p_k) (2n_k p'_k q'_k + n_k p'_k q''_k + n_k p'_k q_k^2), \end{aligned}$$

und es folgt:

$$\lim L_2(D-p'_{2k}) \circ L_1(D-p'_{1k}) y_k = a_0 (2p'_0 q'_0 + p'_0 q''_0) = L_2 \circ L_1 y_0,$$

wobei $a_0 := \lim a_k n_k^{-1}$ wegen der Konvergenz des Klammerausdrucks und von $\{L_2(D-p'_{2k}) \circ L_1(D-p'_{1k}) y_k\}$ existiert.

ii) Durch explizites Ausrechnen von $L_2 \circ L_1 (2p'_0 q'_0 + p'_0 q''_0)$ ergibt sich unter Berücksichtigung von $p_0, q_0 \in \text{span}\{\sin, \cos\}$ die Behauptung $(L_2 \circ L_1) \circ (L_2 \circ L_1) y_0 \neq 0$.

q.e.d.



Damit ist gezeigt, daß nur Linearkombinationen von Potenzprodukten von $\sin$ und $\cos$ als Grenzfunktionen in Betracht kommen. Sie werden also vollständig mit Korollar 6.1.11 beschrieben.

Dieses Ergebnis läßt sich im vorliegenden Fall auch auf andere Weise bestätigen:

6.1.14 Bemerkung:

Voraussetzungen wie in 6.1.13. Dann sind p_0 und q_0 linear abhängig, also $q_0 = \alpha p_0$ ($\alpha \neq 0$),

und daher gilt $L_2 \circ L_1 y_0 = -\lambda p_0 p'_0 = -\frac{3}{2} \alpha (p_0^2)'$.

Beweis: Mit Hilfe der Wronskideterminante zeigt man im Fall p_0, q_0 linear unabhängig leicht, daß p_0 resp. q_0 und daher $L_2 \circ L_1 y_0 = 0$ gelten muß. Nach Voraussetzung ist aber $L_2 \circ L_1 y_0 \neq 0$, so daß die Behauptung aus $p_0'' + p_0 = q_0'' + q_0 = 0$ folgt.

◇

6.1.15 Korollar:

Die Lösungen von $L_2 \circ L_1 y_0 = -\frac{3}{2} \alpha (p_0^2)'$

sind $\frac{\alpha}{2} p_0^2 + \text{Ker}(L_2 \circ L_1)$,

also wie in Korollar 6.1.11 beschrieben.

Beweis:

Mit $p_0'' + p_0 = 0$ verifiziert man, daß $\frac{\alpha}{2} p_0^2$ Lösung der gegebenen inhomogenen Gleichung ist.

q.e.d.

◇

Dieses theoretische Beispiel hat gezeigt, daß man durch die Aussagen der vorangegangenen Paragraphen auch für solche Fälle nützliche Hilfsmittel zur Verfügung hat, in denen nicht alle Voraussetzungen global erfüllt sind. Für die im Abschnitt 6.2 gegebenen Anwendungen müssen nicht die Hilfsmittel zur Lösung der Grenzdifferentialgleichung herangezogen werden, weil der (topologische) Abschluß der Ausgangsmengen explizit bekannt ist. Es zeigt sich nämlich, daß in diesen Fällen bereits der Abschluß der Ausgangsmengen proximal ist.

5.2 Approximation mit Polynom-Exponentialsummen und

rationalen Polynom-Exponentialsummen

Es wird zunächst die folgende Approximationsaufgabe betrachtet:

5.2.1 Approximationsaufgabe (P-Exponentialsummen):

Sei $(V, \| \cdot \|)$ einer der Räume $(C(I), \| \cdot \|_\infty)$, $(L_p(I), \| \cdot \|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Zu vorgegebenen $n, m \in \mathbb{N}$ sei $X_{n,m}$ wie in Definition 5.1.5 b) festgelegt.

Dann lautet die Aufgabe:

Zu $v \in V$ finde man $f_0 \in X_{n,m}$ mit $\| v - f_0 \| = d(v, X_{n,m})$.

In diesem Fall ist die Menge $X_{n,m}$ explizit bekannt, so daß nicht mehr auf die Ergebnisse von §5.3 zurückgegriffen werden muß. Nach P.JANSEN[1970] gilt nämlich:

$$X_{n,m} = \left\{ \sum_{j=1}^s P_j(x) \exp(Q_j(x)) \mid P_j, Q_j \text{ Polynome mit } \text{Grad } Q_j \leq m, \right. \\ \left. 1 \leq j \leq s \text{ und } \sum_{j=1}^s (\text{Grad } P_j + m) \leq mn, s \leq n \right\}$$

(dabei bedeutet "Grad P" den Grad des Polynoms P).

Die Funktionen aus $X_{n,m}^0$ werden in Medizin und Physik als Modellfunktionen benutzt (vgl. M.BESTERHORN[1975]). Im Spezialfall $m=1$, dem Fall der gewöhnlichen Exponentialsummen, gibt es in der Literatur ausführliche Untersuchungen über Approximationseigenschaften und viele Beispiele für praktische Anwendungen (vgl. z.B. J.R.RICE[1962], D.BRAESS[1967], H.WERNER[1969],[1970], E.SCHMIDT[1970,1],[1970,2], R.B.BARRAR und H.L.LOEB[1971], D.W.KAMMLER[1973]).

Während im Fall der Approximation mit gewöhnlichen Exponentialsummen auch Existenzsätze für die L_p -Approximation bekannt sind (D.W.KAMMLER[1973]), wurde der allg. feinere Fall erst

Korollaren von M.BESTEHORN [1975] nur für die Approximation in $(C(I), \|\cdot\|_\infty)$ untersucht. Der dort angegebene Beweis des Existenzsatzes wird durch den Satz 4.2.1.3 auf §4.2 vervollständigt.

6.2.2 Lemma (M.BESTEHORN [1975])

Sei $y(x) = \sum_{j=1}^s P_j(x) \exp(Q_j(x))$ mit $P_j \in P_{n_j-1}$, $Q_j \in P_m$, $1 \leq j \leq s$, $Q_i \neq Q_j$ für $i \neq j$.

Sei $r_{ij} := \text{Grad}(Q_i - Q_j)$, $1 \leq i, j \leq s$, $s_1 := n_1$ und $s_j := \sum_{i=1}^j s_i r_{ij} + n_j$ für $2 \leq j \leq s$.

Dann ist y Lösung der Differentialgleichung

$$L y := \prod_{i=1}^s (D - Q_i')^{s_i} y = 0.$$

Beweis: M.BESTEHORN [1975], Satz 2.5

◇

6.2.3 Bemerkung:

Sei $1 \leq p \leq \infty$ gegeben und $(f_k) \subset X_{n,m}$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_p)$ -Folge. Dann gibt es eine Teilfolge, so daß die Exponenten die Voraussetzungen von Korollar 5.2.5 erfüllen (trivial). Die nach 6.2.2 entsprechend gebildeten Differentialoperatoren erfüllen dann auch alle Voraussetzungen von Lemma 5.2.6.

◇

Mit den bereitgestellten Aussagen erhält man:

6.2.4 Satz:

$X_{n,m}$ ist für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ beschränkt e -folgenkompakt $(\|\cdot\|_p)$.

Beweis:

1) $X_{n,m}$ ist beschränkt prae- e -folgenkompakt:

Dazu muß man nach Satz 2.2.7 nur noch die Nullstellenbedingung nachprüfen.

Für jede Funktion $f \in X_{n,m}$ ist auch $f^{(n+2)}$ wieder von endlicher Gestalt (d.h. : es gibt $n_1, m_1 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $f \in X_{n,m}$ gilt $f^{(n+2)} \in X_{n_1, m_1}$). Die $f^{(n+2)}$ nach Satz 5.2.2 zugeordnete Differentialgleichung hat die in 4.3.8 geforderte Gestalt, wobei die Ordnung der Differentialgleichung unabhängig von f abgeschätzt werden kann (vgl. 6.2.2). Nach Satz 4.1.8 ist damit die schwache Nullstellenbedingung aus Satz 2.2.7 erfüllt.

ii) Sei nun $\{f_k\} \subset X_{n,m}$ eine beschränkte Folge. Sei $\{g_k\} \subset \{f_k\}$ die nach 6.2.3 existierende Teilfolge, die nach Satz 2.2.7 als e -konvergent gegen ein $f_0 \in C(I, \mathbb{R})$ konvergiert, vorausgesetzt werden darf. Die zu g_k mit gemäß 5.2.2 gebildeten Operatoren L_k mit $g_k \in \text{Ker}(L_k)$ erfüllen die Voraussetzungen von Korollar 5.2.4, und die entsprechende Grenzdifferentialgleichung L_0 ist gewöhnlich (4.1.10 ii, 5.2.5) und nach Satz 4.2.10 folgt $f_0 \in \text{Ker}(L_0)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz auf jedem $K \subset I$ gilt $f_0|_K \in X_{n,m}$ und wegen $f_0 \in \text{Ker}(L_0)$ folgt $f_0 \in X_{n,m}$.

q.e.d.



6.2.5 Korollar:

Für $1 \leq p < \infty$ ist $X_{n,m}$ proximal ,

für $1 \leq p < \infty$ gilt stärker $X_{n,m}$ approximativ kompakt.

Beweis:

Satz 3.2.3 , Satz 3.2.5 .

q.e.d.



Betrachtet wird jetzt noch die rationale Approximationsaufgabe.

6.2.6 Approximationsaufgabe (Rationale P-Exponentialsummen)

Sei $(V, \| \cdot \|)$ einer der Räume $(C(I), \| \cdot \|_\infty)$ oder $(L_p(I), \| \cdot \|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Sei

$$X_{n_2, m_2}^{n_1, m_1} := \left\{ \frac{z}{N} \mid z \in X_{n_1, m_1}, N \in X_{n_2, m_2} \setminus \{0\} \right\} \cap V =: X.$$

Sei $X_0 \subset X_{n_2, m_2}^{n_1, m_1}$ (geeignete) Teilmenge.

Gesucht: Zu gegebenem $v \in V$ finde man "beste Approximation" $r_0 \in X_0$.

Funktionen aus $X_{n_2, m_2}^{n_1, m_1}$ werden zum Beispiel bei der Magnetfeldberechnung bei Neutronentransportproblemen verwendet.

6.2.7 Bemerkung:

Wie sich aus Beispiel 3.3.3 ergibt, ist die Approximationsaufgabe für $X_0 = X$ nicht global lösbar. Um globale Existenz sichern zu können, müßte $X_{n_2, m_2}^{n_1, m_1}$ um unstetige Funktionen erweitert werden. Ziel der folgenden Überlegungen ist es daher, durch einschränkende Voraussetzungen an die Nennerfunktionen den Übergang von $X_{n_2, m_2}^{n_1, m_1}$ zu einer zulässigen Menge $X_0 \subset X$ zu erreichen (vgl. Definition 3.3.4).

6.2.8 Bemerkung:

- i) Für alle $1 \leq p < \infty$ gilt $X \subset C(I)$.
- ii) Die Vereinbarung 3.3.2 und die Voraussetzung iii) aus Satz 3.3.8 sind für X erfüllt.

Beweis:

- i) folgt sofort aus der Holomorphie der Funktionen aus $X_{n, m}$ und der Tatsache, daß $(x - x_0)^\alpha \in L_p(I)$ ($x_0 \in I$) genau dann, wenn $\alpha > -1/p$.
- ii) trivial.

◇

6.2.9 Definition:

Für $\mathbb{N} \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$X_{n, m}^{(M)} := \left\{ \sum_{j=1}^s P_j(x) \exp(Q_j(x)) \in X_{n, m} \mid \|Q_j\|_\infty \leq M, 1 \leq j \leq s \right\}$$

die Menge der Polynom-Exponentialsummen mit durch M beschränkten Exponenten.

6.2.10 Lemma:

Für alle $M \in \mathbb{R}^+$, $n, m \in \mathbb{N}$ ist $X_{n,m}(M)$ beschränkt kompakt $(\|\cdot\|_\infty)$.

Sei $\{f_k\} \subset X_{n,m}(M)$ eine beschränkte $(\|\cdot\|_\infty)$ Folge. Dann existiert es eine Teilfolge $\{g_k\} \subset \{f_k\}$, so daß die Exponenten die Voraussetzungen von Satz 5.2.5 erfüllen (wobei der Fall $k \rightarrow \infty$ nicht auftritt), die zugehörigen Differentialgleichungen die Voraussetzungen von Lemma 5.2.6 erfüllen (wobei nur I_{E_k} betrachtet wird) und $\{g_k\}$ e-konvergent ist gegen $g_0 \in X_{n,m}$ (Satz 6.2.4). Nach Lemma 5.2.6 b) ist die Konvergenz gleichmäßig. $g_0 \in X_{n,m}(M)$ folgt aus der Tatsache, daß die Exponenten von g_0 die Grenzpolynome Q_{j_0} der Teilfolgen von $\{Q_{j_k}\}$ sind (folgt aus der Gestalt des Fundamentalsystems der Grenzdifferentialgleichung) und der Tatsache, daß für die Grenzpolynome Q_{j_0} wieder $\|Q_{j_0}\|_\infty \leq M$ gelten muß.

q.e.d.



Damit hat man auch eine Bedingung für die Zulässigkeit einer Menge $X_0 \subset X$ gefunden:

6.2.11 Korollar:

Seien $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Dann ist

$$X_M := \left\{ \frac{Z}{N} \mid Z \in X_{n_1, m_1}, N \in X_{n_2, m_2}(M) \setminus \{0\} \right\} \cap V \subset X$$

zulässige Menge.

Beweis:

Sei $1 \leq p < \infty$ und $\{r_k\} \subset X_M$ eine durch S beschränkte $(\|\cdot\|_p)$

Folgerg: $r_k = \frac{z_k}{\|z_k\|_\infty}$ ($k \in \mathbb{N}$, wobei o.B.d.A. $\|u_k\|_\infty = 1$ ($k \in \mathbb{N}$) vorausgesetzt) sei. Es gilt dann $\sum_{k=1}^{\infty} \|r_k\|_\infty \geq \|z_k\|_\infty$ (vgl. etwa Beweis zu Satz 3.3.6), so daß in Definition 3.3.4 i) die Punkte (1) und (2) erfüllt sind. Nach Lemma 6.2.10 ist die Menge der Häufungspunkte $(\|\cdot\|_\infty)$ der Nennerfunktionen nicht leer und jeder Häufungspunkt hat wegen $\|u_k\|_\infty = 1$ ($k \in \mathbb{N}$) ebenfalls Norm 1. Damit ist auch (3) erfüllt.

q.e.d.



Zusammengefaßt ergibt sich also der folgende Existenzsatz:

6.2.12 Existenzsatz (Rationale Polynom-Exponentialsummen):

Seien $n_1, m_1, n_2, m_2 \in \mathbb{N}$ und $M \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Seien $V, X, X_{n_1, m_1}(M)$ wie in 6.2.6 bzw. 6.2.9 und X_M wie in 6.2.11 festgelegt.

Dann gilt:

X_M ist proximal und im Fall $1 \leq p < \infty$ approximativ kompakt.

Beweis:

X_M ist zulässig (Korollar 6.2.11), Zähler- und Nennerfunktionen sind beschränkt e-folgenkompakt (Satz 6.2.4, Lemma 6.2.10); daher ist X_M proximal bzw. approximativ kompakt (Satz 3.3.12)

q.e.d



- M.B. BARRAN, H.L. MOEB[1971]: On the existence of closest points for non-linear approximating families, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 33-44, 1971.
- H.J. BARTSCH[1967]: Mathematische Formeln, Ernst Battenberg Verlag, Stuttgart, 1967.
- M. VERMEER[1975]: Exponentialapproximation mit rationalen Exponenten, Dissertation, Münster, 1975.
- Z. BELESC[1967]: Approximation mit Exponentialsummen, Computing, 2,309-321, 1967.
- W.A. COPPEL[1971]: Disconjugacy, Lecture Notes in Mathematics, Nr. 226, Springer Verlag, 1971.
- C. De BOOR[1969]: On the approximation by s -polynomials, in "Approximations with special emphasis on spline functions", I.J. SCHOENBERG (ed.), Academic Press, New York, 1969.
- R.A. De VORE[1975]: Minimum moduli of differential operators from the viewpoint of approximation theory, J. Approx. Th., 13,128-139, 1975.
- N.V. EVIMOV, S.B. STEČKIN[1961]: Approximative compactness and Čebyšev sets, Soviet Math. Dokl., 2,1226-1228, 1961.
- W. GRÖBNER[1968]: Algebraische Geometrie I, Bibl.Inst. Mannheim, Hochschultaschenbücher Nr. 273/273a, 1968.
- W. GRÖBNER[1970]: Algebraische Geometrie II, Bibl. Inst. Mannheim, Hochschultaschenbücher Nr. 737/737a*, 1970.
- L.H. HAINES, L.M. SILVERMAN[1968]: Internal and external stability of linear systems, J. Math. Anal. Appl., 21,277-286, 1968.
- C.R. HOBBY, J.R. RICE[1967]: Approximation from a curve of functions, Arch.Rat.Math.Anal., 24,91-106, 1967.

- K.-H. HOPFMANN[1972]: Approximationstheorie, Vorlesungen Universität München, 1972.
- P. JABSEN[1970]: Zur Approximation mit n -ter Ordnung Polynomen insbesondere Exponentialsummen, Dissertation Münster, 1970.
- D.W. KAMMLER[1972]: Existence of best approximations by sums of exponentials, J. Approx. Th., 9, 78-90, 1973.
- D.W. KAMMLER[1974]: Existence of best approximations by exponential sums in several independent variables, J. Approx. Th., 11, 143-148, 1974.
- J.R. NICE[1962]: Chebyshev approximation by exponentials, J. Soc. Indust. Appl. Math., 10, 149-161, 1962.
- H. RICHTER[1966]: Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2. Aufl., 1966.
- E. SCHMIDT[1970,1]: Stetigkeitsanfragen bei der Tschebyscheff-Approximation mit Exponentialsummen, Math. Z., 113, 159-170, 1970.
- E. SCHMIDT[1970,2]: Zur Kompaktheit bei Exponentialsummen, J. Approx. Th., 3, 445-454, 1970.
- I. SINGER[1970]: Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.
- J. SPIESS[1970]: Eindeutigkeitssätze bei der nichtlinearen Approximation in striktkonvexen Räumen, Dissertation, Hamburg, 1970.
- H. WERNER[1969]: Der Existenzsatz für das Tschebyscheff'sche Approximationsproblem mit Exponentialsummen, Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik, Vortragsauszüge Tagung 1967, Oberwolfach, Birkhäuser-Verlag, 133-143, 1969.

7. WERNER[1970]: Tschetyscheff-approximation with sums of exponentials, in "Approximation theory", IALM (ed.), Academic Press, London-New York, 1970.
8. JUCK[1965]: Cayley's decomposition and Polya's W-property of ordinary linear differential equations, Israel J. Math., 3, 81-86, 1965.
9. ZERNER[1966]: On approximation by solutions of ordinary linear differential equations, IMA J. Numer. Anal., 3, 360-363, 1966.

Lebenslauf

Geburtsdatum: 29. Juli 1944
Geburtsort: Kronach / Oberfranken

Schulbildung: Volksschule:
Sept. 1950 - Dez. 1951 in Kronach
Dez. 1951 - Juli 1955 in Gräfelhof

Realgymnasium:
Sept. 1955 - Juli 1964 in Gräfelhof
Abitur: Juli 1964

Wehrdienst: Okt. 1964 - März 1966

Studium: Mathematik an der Universität München
von Mai 1966 - Juli 1972

Abschlußprüfung: Diplom in Mathematik naturwissenschaftlicher Richtung

Berufliche
Tätigkeiten: Juli 1972 - Jan. 1973 Wissenschaftlich
Hilfskraft an der Universität München
Feb. 1973 - März 1975 Wissenschaftlich
Angestellter an der Technischen Universität München
April 1975 - Juli 1975 Gast an der Freien
Universität Berlin
ab August 1975 Wissenschaftlicher Assistent
an der Freien Universität Berlin





